ТУМАНОВ САВЕЛИЙ ИВАНОВИЧ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

Пособие для самообразования

Советские учебники

Москва
2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее третье издание, по сравнению с предыдущим, внесены следующие изменения.

Переработаны: введение — «Учащимся о математике» и тема «Что такое алгебра». Первые приложения преобразований к решению задач перенесены несколько вперед. Расширено понятие пропорциональности (прямой и обратной). Показана идея деления многочленов методом неопределенных коэффициентов. Глава «Обратные тригонометрические функции» дополнена темой «Взаимно обратные функции и связь между их графиками». Показано, как с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим легко решаются многие трудные задачи.

Включена новая глава — «Начальные сведения из теории вероятностей». Начала анализа дополнены техникой дифференцирования сложных функций и применением интегрирования к вычислению объемов. Несколько расширены применения производной к исследованию функций на экстремум и построению их графиков. Несколько дополнены сведения о мощности бесконечных множеств. Включены новые задачи, предназначенные усилить интерес учащихся к математике.

Исключен раздел «Об аксиоматическом методе в математике».

При написании темы «Начальные сведения из теории вероятностей» автор пользовался советами и материалами, предоставленными доцентом В. Е. Гмурманом, за что автор приносит ему искреннюю благодарность.

Автор

УЧАЩИМСЯ О МАТЕМАТИКЕ

1. МАТЕМАТИКА И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

В обычный школьный курс математики входят следующие математические предметы: арифметика, элементарная алгебра, элементарная геометрия и тригонометрия. Содержание этих четырех предметов в основном соответствует тому уровню математических познаний, который был достигнут человечеством к началу XVII века. Математические же познания, достигнутые в последующее время, изучаются в соответствующих высших учебных заведениях и научных институтах.

Арифметика, элементарная алгебра, элементарная геометрия и тригонометрия относятся к так называемой «элементарной математике». Математические же дисциплины, изучаемые в высших учебных заведениях, относятся к высшей математике.

Однако современный школьный курс математики не изолирован от идей высшей математики. Например, в нем имеются сведения о функциях, пределах, координатах, графическом методе и даже производной, т. е. сведения, относящиеся к началам высшей математики.

Математика, так же как и другие науки, возникла, становилась и развивается на основе производственно-практической деятельности людей. Так, начала арифметики и геометрии возникли в связи с самыми простейшими запросами хозяйственной жизни. Счет предметов, потребность измерять количество продуктов и производить расчеты при их обмене, знать протяженность дорог, площади земельных участков, размеры и вместимость сосудов, исчислять время — все это и приводило к возникновению и развитию первоначальных понятий арифметики и геометрии. Вопросы астрономии привели к появлению зачатков тригонометрии еще в Вавилонии (Месопотамия) за много веков до нашей эры.

Слово «математика» происходит от греческого слова μαϑημα, что означает «познание», «наука».

Содержание и происхождение математики как науки точно и полно характеризуется следующими словами Энгельса: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть —

весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины... Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики». (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, М., Госполитиздат, 1966, стр. 33.)

Глубина и богатство этого классического определения будут раскрываться перед учащимся все полнее по мере расширения его математических познаний.

Остановимся сначала на том, что математика есть наука о количественных отношениях.

Для определения объемов некоторых тел или площадей некоторых плоских фигур бывает необходимым вычислять суммы, подобные следующей:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \ldots + 997 \cdot 997 + 998 \cdot 998 + \\ + 999 \cdot 999 + 1000 \cdot 1000.$$

В этой сумме 1000 слагаемых, хотя явно выписанных слагаемых только восемь. Остальные слагаемые подразумеваются под многоточием. Так, например, после слагаемого $4 \cdot 4$ следует слагаемое $5 \cdot 5$, после $5 \cdot 5$ следует $6 \cdot 6$ и т. д., перед слагаемым $997 \cdot 997$ подразумевается $996 \cdot 996$, перед $996 \cdot 996$ подразумевается $995 \cdot 995$ и т. д. Употреблять здесь многоточие не только целесообразно, но даже необходимо, так как выписывать все 1000 слагаемых было бы крайне утомительно и такая запись заняла бы не одну страницу.

Если предложенную сумму вычислять непосредственно, то придется выполнить 1000 раз умножение, а затем сложить тысячу полученных произведений. На все это одному вычислителю потребовалось бы не менее 20 часов. Между тем если воспользоваться соответствующим математическим законом (стр. 408), то за одну минуту можно обнаружить, что искомая сумма равна 333 833 500. Это число есть значение выражения

$$\frac{1000 \cdot 1001 \cdot 2001}{6}.$$

По какому же закону написано это выражение?

Первый множитель в числителе, а именно число 1000, есть число слагаемых в данной сумме; второй множитель есть число, на единицу большее числа слагаемых; третий множитель есть сумма первых двух. Знаменатель же не зависит от числа слагаемых (он всегда равен 6).

Проверьте этот закон на примере

$$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5+6\cdot 6+7\cdot 7=\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}.$$

В качестве других количественных отношений, изучаемых с помощью математики, приведем, например, взаимосвязь между атмосферным давлением и высотой над уровнем моря или, скажем, количественные отношения между силой притяжения двух тел друг к другу, массами этих тел и расстоянием между их центрами тяжести.

Теперь приведем для иллюстрации примеры применения математики к изучению пространственных форм.

С помощью математики определяются орбиты планет, движущихся вокруг Солнца.

С помощью математики определяются площади поверхностей и объемы тел любой формы, длины кривых линий, изучается кривизна таких линий и кривизна кривых поверхностей и т. д. и т. п.

Без математики и ее методов нельзя изучить достаточно полно физику, механику, электротехнику, радиотехнику и прочие инженерные науки. Математика нужна при проектировании сколько-нибудь сложных сооружений. Начала арифметики нужны каждому человеку, а элементарные знания по геометрии и умение пользоваться буквенными формулами и графиками необходимы каждому квалифицированному рабочему и служащему. В целом же математика, как и всякая другая наука, является одним из средств познания закономерностей окружающего мира и раскрытия путей использования этих закономерностей в практической деятельности людей.

Но математика изучает не все содержание окружающих нас предметов и явлений. Например, с помощью только одной математики нельзя определить химический состав воды или изучить процессы, происходящие в живом организме. Математика изучает лишь количественные отношения и пространственные формы предметов и явлений. Другие же стороны явлений изучают иные науки (физика, химия, аэродинамика, радиотехника и т. д.). Сложные технические вопросы разрешаются совместными усилиями ученых и практиков различных специальностей, т. е. путем применения не одной науки, а одновременно нескольких соответствующих наук. Поэтому, зная только математику, нельзя построить, например, мост через Волгу. Вместе с тем такой мост нельзя построить и без математических расчетов. Следовательно, для сооружения крупного моста математические знания являются необходимыми, но не достаточными. Кроме математики, нужны еще строительная механика, материаловедение и многое другое.

Из сказанного выше ясно, что математика, выделяя количественные отношения и пространственные формы, оставляет в стороне все остальное, не являющееся предметом математического исследования. Например, изучая свойства шара, математика не интересуется ни его цветом, ни материалом, из которого он сделан. Изучая свойства чисел и правила действия над ними, математика оставляет в стороне конкретные величины и формулирует полученные результаты независимо от того, что этими числами выражено. Наряду с этим математика отличается еще и той особенностью, что все объекты, ею изучаемые, мыслятся абсолютно точными, идеальными. Поясним, что это значит.

Никакое физическое шарообразное тело (например, мяч, глобус или игрушечный воздушный шар) не может иметь абсолютно гладкую или, точнее говоря, идеально шаровую поверхность. Шарообразные же формы, изучаемые в математике, мыслятся абсолютно точными, имеющими абсолютно гладкую, идеальную шаровую поверхность.

Всякая линия, начерченная тушью или проведенная карандашом, имеет ширину и толщину. Линии же, изучаемые в математике, мыслятся имеющими только длину и не обладающими ни шириной, ни толщиной.

Всякая точка, изображенная тушью или карандашом, имеет какие-то размеры (длину, ширину и толщину). Все же без исключения размеры математической точки мыслятся равными нулю.

Никакой треугольник, вырезанный из дерева, картона или металла, либо просто изображенный на чертеже, не может иметь идеально прямой угол, идеально прямолинейные края или границы. Длину сторон такого треугольника никогда нельзя определить абсолютно точно *. Треугольники же, изучаемые в математике, мыслятся идеальными, т. е. имеющими абсолютно точную прямолинейность сторон, абсолютно точные углы, абсолютно точную длину сторон и т. д.

Особенность математики изучать количественные отношения и пространственные формы изолированно от всего прочего и при этом в их идеальном виде является основным условием существования математической науки и ее силой. Без этой особенности математика как наука не существовала бы. Поясним сказанное.

Еще за две тысячи лет до нашей эры египетские землемеры пользовались для построения прямых углов веревочным треугольником со сторонами 3, 4 и 5. (Очевидно, что $5 \cdot 5 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4$.)

* Никакую величину нельзя практически измерить с абсолютной точностью; ее можно измерить только приближенно с той или иной степенью точности, которая зависит от измерительных приборов. Если же под измерением понимать счет конечного числа предметов, то такое измерение выполнимо точно.

Были известны и другие прямоугольные треугольники, стороны которых выражались целыми числами, например 5, 12, 13. Но этот замеченный факт тогда не могли еще обоснованно обобщить. И только в VI веке до нашей эры Пифагор доказал, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе любого прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах. Но Пифагор сумел прийти к этому открытию только потому, что он отвлекся от физических треугольных форм и стал рассматривать треугольник математический, воображаемый, идеальный, т. е. такой, в котором прямолинейность сторон, прямой угол и длина сторон мыслятся абсолютно точными. При этом его исследования и суждения относились не к отдельному треугольнику, а ко всему множеству прямоугольных треугольников.

Такой метод исследования геометрических форм появился далеко не сразу, а лишь в результате длительной работы многих предшественников Пифагора и самого Пифагора. Надо было от египетских веревок и от намеченных вехами или заборами границ земельных участков перейти к отвлеченному понятию линии, в частности прямой линии, не имеющей ни ширины, ни толщины. Надо было установить добытые практикой первоначальные геометрические истины (аксиомы), установить признаки равенства треугольников, научиться определять площадь треугольника и т. д. и т. п.

Если бы мы отказались пользоваться таким методом исследования пространственных форм, тогда геометрия как наука не могла бы существовать. В самом деле, изучая только веревочные треугольники и другие веревочные фигуры, мы обнаружили бы лишь отдельные случайные факты и не смогли бы из них сделать далеко идущие выводы общего порядка. Мы не сумели бы, например, установить сколько-нибудь полно взаимосвязь между сторонами и углами треугольника, между его площадью и сторонами и т. д.

Первоначальным источником всякого познания являются наши чувственные восприятия, получаемые из опыта, из наблюдений. Но данные, полученные из опыта, из наблюдений — это лишь первый шаг познания. Вторым его шагом является обобщение этих данных и их логическая обработка, т. е. создание теории. Но теория имеет значение только тогда, когда она применяется на практике. Поэтому третьим шагом познания является применение теории к практике, а вместе с тем и проверка на практике выводов теории.

Таким образом, всякое познание вырастает только из практики человеческого общества. (Здесь слово «практика» понимается в самом широком смысле. Под практикой понимается опыт, наблюдения, производство, техника, наука, искусство и культура.)

Математические теории имеют огромную ценность, так как без них невозможно решение крупных практических проблем *, связанных с техникой, производством и строительством, и теоретических проблем во многих других науках (механике, физике, аэродинамике, гидродинамике, радиолокации и т. д.).

Когда мы мысленно отвлекаемся от всего прочего содержания явления или предмета и изучаем только какую-нибудь одну существенную его сторону, например форму предмета или количественные отношения между его элементами, то говорят, что мы изучаем эту сторону явления или предмета абстрактно. Таким образом, математика есть наука абстрактная. Слово «абстракция» происходит от латинского слова «abstractio», что означает «отвлечение».

Поясним сказанное на примере.

Пусть предметом нашего изучения служит шар. Отвлекаясь от многих свойств шара (его цвета, материала, из которого он сделан, его веса и т. д.), выделим мысленно только одно его свойство: иметь объем. Но свойством иметь объем обладают и другие тела. Поэтому возникает такая задача: «Найти общий метод вычисления объемов тел любой формы, а не только шара». Силой абстракции такой общий метод в математике уже создан.

Абстрактное мышление есть более высокая ступень отражения в нашем сознании закономерностей и связей объективного мира, нежели живое созерцание или чувственные восприятия. Например, мы не слышим и не видим непрестанно распространяющиеся вокруг нас радиоволны. Несмотря на это, в ходе практической деятельности людей при помощи абстрактного мышления это явление познано и изучено настолько глубоко, что получило в руках людей широчайшее практическое применение (радиоприемники, телевизоры, радиолокационные приборы и т. д.).

Чувственным восприятием нельзя охватить движение со скоростью света, а абстрактному мышлению оно доступно. С помощью созерцания или чувственного восприятия мы не можем видеть ту закономерную зависимость, которая объективно существует между площадью и длинами сторон треугольника. С помощью же абстрактного мышления на базе уже ранее добытых практикой и теорией познаний мы эту зависимость в состоянии обнаружить. Таким образом, благодаря абстракции мы овладеваем правилом, позволяющим определять точно площадь треугольника по заданной длине его сторон.

Роль абстракции велика не только для познания окружающей нас природы, не только для построения математических и дру-

* Проблема — это сложный практический или теоретический вопрос, подлежащий изучению, исследованию и разрешению. Слово «проблема» происходит от греческого слова «προβλημα», что означает «задача». Буквальный перевод этого греческого слова — «нечто, брошенное вперед».

гих естественнонаучных теорий. Она не в меньшей мере велика и для познания сущности явлений и законов развития общества. Приведем хотя бы один пример.

Цена товара и его стоимость представляют собой совершенно различные понятия. Цены товаров на капиталистическом рынке колеблются в зависимости от спроса и предложения. Когда спрос на товары превышает их предложение, цены поднимаются и, наоборот, уменьшение спроса ведет к понижению цен. Не зная, что такое стоимость товара, можно подумать, что цена товара и есть его стоимость. В действительности же это совершенно неверно. Стоимость не зависит от спроса и предложения. Стоимость товара определяется количеством затраченного на его производство общественно необходимого труда.

В том случае, когда спрос и предложение находятся в равновесии, цена товара представляет собой денежное выражение стоимости. Однако такой идеальный случай на капиталистическом рынке никогда не может иметь места в силу анархии капиталистического способа производства. Стоимость есть важнейшая экономическая категория, хотя и не вечная. Особенно важное значение понятие стоимости имеет для анализа общественных отношений при капитализме. Сущность этих общественных отношений невозможно познать глубоко без понятия стоимости. Но понятие стоимости не могло бы возникнуть без абстракции. К. Маркс вывел его именно путем абстракции. Вот что он говорит по этому поводу: «...при анализе экономических форм нельзя пользоваться ни микроскопом, ни химическими реактивами. То и другое должна заменить сила абстракции» (К. Маркс, Капитал, т. 1, предисловие к первому изданию).

История дает множество примеров предвидения с помощью научной абстракции. В. И. Ленин в своем произведении «Что такое «друзья народа» и как они воюют против социал-демократов?», написанном им еще в 1894 году (В. И. Ленин, Сочинения, т. 1, 1958) на основе научной революционной теории предвидел неизбежность социалистической революции в России. Гениальность этого величайшего предвидения В. И. Ленина подтвердила Великая Октябрьская социалистическая революция.

Д. И. Менделеев на основе открытого им периодического закона предсказал свойства трех еще не открытых химических элементов. Вскоре после этого (с 1875 до 1886 г.) все эти три элемента были открыты. Предсказанные Д. И. Менделеевым свойства этих элементов подтвердились с большой точностью.

Изучая неправильность в движении Урана, французский астроном Леверье с помощью вычислений установил существование за пределами орбиты Урана другой, еще никому не известной планеты. Леверье указал момент времени и место на небесном своде, где должна была находиться эта планета. Точно в указанный момент времени и точно в указанном им месте была действительно обнаружена берлинским астрономом Галле в сентябре 1846 года неизвестная планета (позже названная Нептуном).

В заключение приведем замечательное высказывание В. И. Ленина о значимости абстракции. «Абстракция *материи, закона* природы, абстракция *стоимости* и т. д., одним словом *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*» (В. И. Ленин. Полн. собр. соч., изд. 5, М., Госполитиздат, т. 29, 1963, стр. 152).

Возвращаясь к математике, заметим, что абстракция в математике, так же как и во всякой другой науке *, не означает отрыва науки от материальной действительности. Например, запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется именно в неразрывной связи с запросами производства, техники и естествознания.

Запросы производства и техники приводят к рождению в математике новых идей, новых методов. Усилиями ученых эти идеи и методы теоретически развиваются, обобщаются и после этого в свою очередь становятся на службу дальнейшему прогрессу техники и производства. Между техникой и наукой (в частности, математикой) происходит непрестанное чередующееся взаимодействие. Практика двигает вперед науку, наука двигает вперед практику.

Например, созданная промышленностью сложная аппаратура обеспечила физикам возможность проведения таких экспериментов, которые после теоретической обработки привели к открытию атомной энергии. В свою очередь физика атома сыграла огромную роль для дальнейшего развития техники. Например, современная металлургия, создающая новые сплавы с заданными свойствами, была бы немыслимой без исследования атомной структуры кристаллов.

Чередующееся взаимодействие наблюдается не только между практикой и наукой, но и между самими науками. Например, новые задачи, возникавшие в физике при изучении колебательных процессов, повлияли на развитие в математике теории дифференциальных уравнений. Достижения же по теории дифференциальных уравнений становились реальным орудием для разрешения в физике вопросов по теории колебаний, не только раньше возникших, но и более сложных, новых.

Новые методы и идеи в математике возникают не только из потребностей производства или других наук, но и из внутренних проблем самой математики (например, геометрия Лобачевского, теория функций комплексного переменного и многое другое).

Созданное великим Лобачевским в первой половине XIX века новое, более широкое понимание предмета геометрии привело в конце XIX и начале XX века к перестройке всей системы математических знаний. То более широкое понятие пространства,

---

* Без абстракции не может существовать и развиваться никакая наука.

которое возникло в геометрии Лобачевского, в дальнейшем оказалось тесно связанным с развитием физики, в первую очередь теории относительности (начало этой теории положено Эйнштейном). Взаимосвязь, установленная в этой теории между массой и энергией, явилась основой всего учения об атомной энергии.

Вся история развития наук ярко свидетельствует о том, что обогащение математики, физики, химии, астрономии и других областей естествознания происходило в тесной взаимосвязи, в условиях взаимного воздействия достижений одних наук на успехи в других.

2. О возникающих у учащихся ошибочных взглядах на математику

В заключение сделаем еще несколько замечаний с целью помочь учащемуся правильно определить свое отношение к математике.

Еще до сих пор среди части учащихся существует представление об алгебре и математике вообще как о науке сухой, скучной, как бы уже полностью законченной и застывшей, как о науке, оторванной от жизни. Такое представление является совершенно неправильным, ошибочным, основанным на незнании сути дела. Напротив, математика есть живая, непрестанно развивающаяся наука, теснейшим образом связанная с жизнью, с практической деятельностью людей. Ежегодно издаются тысячи работ по математике, в которых ставятся и решаются все новые и новые теоретические и практические задачи.

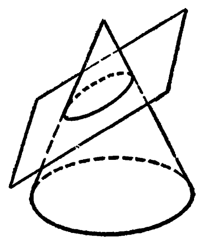

Рис. 1.

Особенно замечательно, что даже самые абстрактные математические теории, возникшие из внутренних потребностей самой математики, без непосредственных толчков со стороны естествознания и техники, находят тем не менее плодотворные применения. Чтобы подтвердить это, приведем несколько примеров, исторических и близких к современности.

1. Древнегреческие математики изучали свойства эллипса (эллипс — замкнутая линия, возникшая как сечение конической поверхности плоскостью, рис. 1), а спустя более тысячи лет Кеплер использовал их идеи для определения траекторий планет.

2. В 1858 году через Атлантический океан был проложен первый телеграфный кабель. Оказалось, что один сигнал (точка или тире) передавался по этому кабелю в виде множества путаных знаков, исключавшего возможность что-либо разобрать.

Казалось, что огромные средства и труд, затраченные на сооружение кабеля, пропали безвозвратно. И вот выдающийся английский физик Уильям Томсон делает из математической теории теплопроводности, созданной знаменитым французским математиком Фурье еще в 1808 году и английским математиком Грином в 1828 году, такие практические выводы, при помощи которых удается фактически бездействующий кабель превратить в кабель, работающий совершенно нормально.

3. Математическая теория Пуассона о равновесии компасной стрелки на протяжении целых 40 лет не находила практического применения. Между тем из-за погрешностей в показаниях компаса корабли нередко терпели аварии. И только после того как в 1862 году на протяжении лишь одного месяца у берегов Ирландии из-за неправильных показаний компаса погибли два океанских парохода, ученые и специалисты обратились к теории Пуассона. На базе этой теории были разработаны практические способы устранения погрешностей в показаниях морских компасов. Таким образом математическая теория Пуассона помогла повысить безопасность мореплавания.

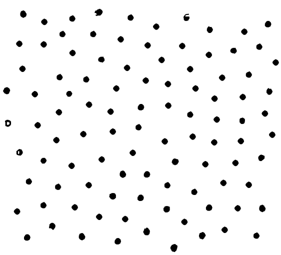

Рис. 2.

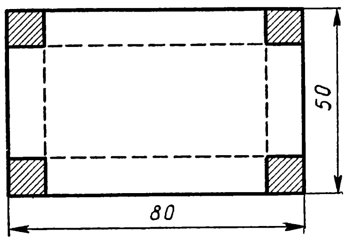

Рис. 3.

4. Мнимые числа появились на свет в алгебре, и долгое время их реальный смысл оставался непонятным. Однако после того как была создана из чисто математических интересов абстрактная теория функций комплексного переменного, или, выражаясь доступно, теория «мнимых функций», оказалось, что эта теория является реальным средством решения задач естествознания и техники. Так, основная теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе крыла самолета доказывается как раз средствами этой теории.

5. Теории, разработанные для расчета движения планет под действием притяжения к Солнцу и между собой, оказались применимыми к решению вопросов, связанных с волновой качкой корабля.

Теория качки корабля при любом волнении создана впервые выдающимся русским ученым академиком А. Н. Крыловым. Путем труднейших математических исследований и расчетов им определены усилия, возникающие в различных частях корабля при его качке.

6. Английский физик Максвелл с помощью чисто математических исследований вывел, что могут существовать электромаг-

нитные волны и что они должны распространяться со скоростью света. Этот вывод Максвелла толкнул на поиски электромагнитных волн чисто электрического происхождения. Такие волны были открыты Герцем. А вскоре А. С. Попов нашел средства возбуждения, передачи и приема электромагнитных колебаний и положил тем самым начало всей радиотехнике.

Таких примеров можно было бы привести еще очень много.

Но надо заметить, что все современные математические теории, имеющие важные приложения в естествознании и технике, связаны с высшей математикой, связаны так или иначе с дифференциальным и интегральным исчислениями. Но это обстоятельство не умаляет значения самой элементарной математики. Во-первых, элементарная математика является основой всех математических дисциплин (операции, производимые в этих дисциплинах, неразрывно связаны с операциями элементарной математики). Во-вторых, имеется немало и таких практических и теоретических задач, для решения которых достаточны лишь средства элементарной математики. Для иллюстрации приведем несколько таких задач. (Решения этих задач мы здесь не приводим и не предлагаем их решать учащемуся. Мы хотим лишь убедить учащегося в том, что даже с помощью только одной элементарной математики можно решить множество интересных задач.)

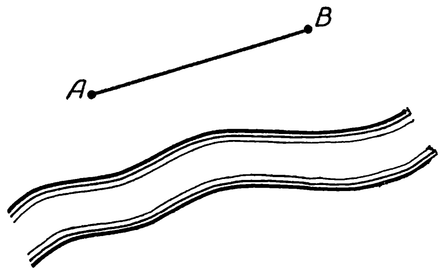

Рис. 4.

З а д а ч а 1. Путем наблюдения с берега моря определить скорость корабля (движущегося прямолинейно и равномерно).

З а д а ч а 2. На плоскости расположены произвольным образом 100 точек. Найти центр и радиус наименьшего круга, охватывающего собой все эти точки (рис. 2).

З а д а ч а 3. Дан прямоугольный лист железа размерами 80×50 *см* (рис. 3). Требуется вырезать около всех его углов одинаковые квадраты так, чтобы после загибания остающихся кромок получилась открытая сверху коробка наибольшей вместимости.

З а д а ч а 4. Не переходя реки, определить расстояние между пунктами A и B, расположенными за рекой (рис. 4).

З а д а ч а 5. Доказать, что во всяком выпуклом многограннике сумма числа вершин и числа граней всегда на две единицы больше, чем число ребер (теорема Эйлера о многогранниках). Приведем иллюстрацию. В кубе (рис. 5) 8 вершин, 6 граней и 12 ребер. Сумма чисел 8 и 6 действительно на 2 больше, чем 12.

В пятиугольной пирамиде (рис. 6) 6 вершин, 6 граней и 10 ребер. Сумма чисел 6 и 6 действительно на 2 больше, чем 10.

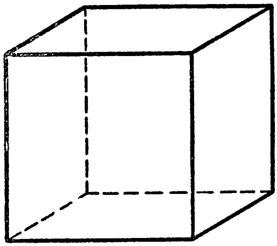

Рис. 5.

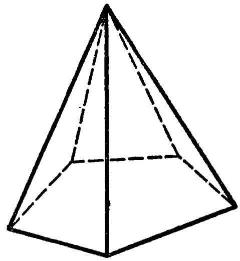

Рис. 6.

Задача 6. Доказать, что любое натуральное число есть сумма не более чем четырех квадратов. Например:

$$15=1^2+1^2+2^2+3^2;$$
$$30=1^2+2^2+3^2+4^2=1^2+2^2+5^2;$$
$$74=1^2+1^2+6^2+6^2=1^2+3^2+8^2=3^2+4^2+7^2=5^2+7^2;$$
$$100=1^2+1^2+7^2+7^2=1^2+3^2+3^2+9^2=1^2+5^2+5^2+7^2=$$
$$=5^2+5^2+5^2+5^2=6^2+8^2=10^2;$$
$$555=1^2+7^2+12^2+19^2=1^2+5^2+23^2.$$

Задача 7. Доказать, что сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}$$

при достаточно большом значении целого положительного числа n может стать более любого числа, например более миллиарда, а сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

будет оставаться меньше 2, сколь бо́льшим ни брали бы мы число n.

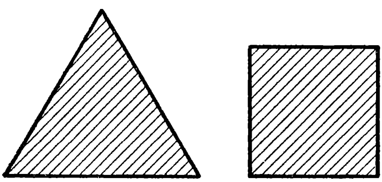

Рис. 7.

Задача 8. Разрезать равносторонний треугольник прямолинейными разрезами на 5 таких частей, из которых можно было бы составить квадрат, равновеликий этому равностороннему треугольнику (рис. 7).

Математические решения задач о превращении одних фигур с помощью прямолинейных разрезов в другие, им равновеликие, применяются на практике в целях наиболее экономной раскройки промышленных материалов (листового железа, кожи и других материалов).

В конце книги в приложении указана литература, в которой можно найти решения этих восьми задач. Разумеется, изучать эти решения удобнее после приобретения соответствующих знаний по алгебре, геометрии и тригонометрии.

Существует еще одно не совсем правильное представление о математике, а именно: часто считают, что для понимания и изучения математики требуются какие-то особые способности. В действительности это неверно. По совершенно справедливому мнению академика А. Н. Колмогорова, «обычные средние человеческие способности вполне достаточны, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам не только сознательно усвоить математические знания, преподающиеся в средней школе, но и разобраться, например, в началах дифференциального и интегрального исчислений» (А. Н. Колмогоров, О профессии математика, «Советская наука», 1954). Изучить основы математики не труднее, чем основы какой-либо другой науки. В этом каждый может убедиться сам, если только станет приобретать математические знания шаг за шагом, соблюдая строгую последовательность в усвоении материала.

Мы сами являемся свидетелями того, как ежегодно десятки тысяч молодых людей, не ставивших себе задачу стать математиками, все же достаточно хорошо овладевают основами математики и становятся квалифицированными инженерами, техниками, агрономами или руководителями крупных предприятий.

Математика и свойственный ей стиль мышления представляют собой существенный элемент общей культуры современного человека, даже если он не занимается деятельностью в области точных наук или техники.

3. Об инициативном подходе к изучению математики

К изучению или решению всякого заслуживающего внимания вопроса надо подходить инициативно. Поясним это на простых примерах.

Пример 1. Пусть требуется вычислить сумму всех целых чисел от 1 до 1000, т. е. следующую сумму:

$$1+2+3+4+5+\ldots+996+997+998+999+1000.$$

Вычислять эту сумму путем последовательного прибавления каждого последующего слагаемого очень неудобно, так как на это потребуется много времени. Поэтому должна возникнуть мысль о том, нельзя ли определить эту сумму каким-нибудь косвенным рациональным способом.

Проявив наблюдательность, можно заметить, что: сумма двух крайних слагаемых равна 1001; сумма второго слагаемого и предпоследнего тоже равна 1001; сумма третьего слагаемого от начала и третьего от конца опять равна 1001 и т. д.

Легко видеть, что таких пар слагаемых будет 500. Следовательно, вся сумма равна произведению

$$1001\cdot 500,$$

т. е. равна 500500.