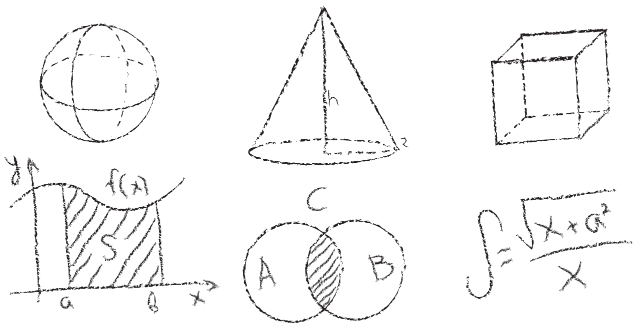
НАУКА НА ПАЛЬЦАХ

Борис Элькин

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ТЕХ, КТО НЕ ОТКРЫВАЛ УЧЕБНИК



Москва
Издательство АСТ

УДК 51
ББК 22.1
Э53

Художественное оформление —
Алексея Закопайко

Элькин, Борис Михайлович
Э53 Математика: для тех, кто не открывал учебник / Б.М. Элькин. – Москва : Издательство АСТ, 2020. – 384 с. – (Наука на пальцах).

ISBN 978-5-17-120370-2

Для многих математика — это скучный обязательный предмет, по которому сдают ЕГЭ. Чтобы разрушить этот стереотип, приведём простой пример: математические расчёты позволили создать навигаторы, а иначе мы бы до сих пор пользовались бумажными картами.

Математика — это не абстракция, а наука, помогающая лучше понять окружающий нас мир.

Автор расскажет о том, как она устроена: откуда появились термины, для чего строятся графики, зачем решаются уравнения, как записывается информация с помощью цифр, букв и формул. Объяснит, как математика связана с другими науками (физикой, астрономией, экономикой) и различными направлениями искусства (архитектурой, скульптурой, музыкой), что общего между алгеброй и геометрией. В книге собраны интересные факты из истории и курьезные случаи из жизни выдающихся математиков, так что скучно точно не будет!

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-17-120370-2

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Когда разум спит, фантазия в сонных
грёзах порождает чудовищ,
но в сочетании с разумом фантазия
становится матерью искусства
и всех его чудесных творений.
Франсиско Гойя

В 1998 году американская журналистка Сильвия Назар написала биографию математика и нобелевского лауреата в области экономики **Джона Нэша**. Книга мгновенно стала бестселлером. В 2001 году по ее мотивам был снят фильм, получивший четыре «Оскара» (за лучший фильм, лучший сценарий, режиссуру и женскую роль второго плана). В российский прокат кинолента вышла под названием «Игры разума».

Джон Нэш действительно был необычным человеком. Уже в возрасте 19 лет он окончил частный Политехнический институт Карнеги сразу с двумя дипломами: бакалавра и магистра. Нэш решил продолжить обучение в Принстонском университете, и институтский преподаватель снабдил его одним из самых лаконичных рекомендательных писем. В нём была только одна строчка: «He is a mathematical genius»[1]. Джону ещё не было 25 лет, когда он опубликовал четыре революционные работы по математической теории игр.

1 «Он математический гений». — Пер. ред.

К 30 годам к математическим добавились еще игры разума: у Нэша появились признаки шизофрении (его преследовали слуховые галлюцинации). Но Джон не сдавался, продолжал преподавать и заниматься математикой и, к удивлению врачей, почти победил собственное безумие. Он научился контролировать своё заболевание и отличать реальность от галлюцинаций.

Если заинтересовали подробности жизни Джона Нэша, то можно прочесть книгу Сильвии Назар. Она издана на русском языке. Но удивительный факт: **в школе Нэш учился средне, а математику вообще не любил!** Её скучно преподавали. Поворотным моментом, по-видимому, стала удачная книга. Вот как об этом он написал в автобиографии: ***«К тому времени, когда я поступил в высшую школу, я читал классическую книгу Е. Т. Белла «Люди математики», и, я помню, мне удалось доказать малую теорему Ферма, о целом числе, умноженном на себя P раз, где P – простое число».*** Отмечу только, что Джону было тогда 14 лет.

Мы все изучали математику в школе, и далеко не у всех этот предмет вызывал неподдельный интерес. Почти нет, к сожалению, на уроках увлекательных и интересных для общего обсуждения задач.

У А. П. Чехова есть замечательный рассказ «Кто виноват?» о котёнке, которого насильно учили ловить мышей. Котёнок, став солидным котом, при одном только виде мыши пугался и удирал. Так и «натаскивание» на решение однообразных стандартных задач вынуждает искать предметы более интересные, чем математика.

Где-то за пределами школы остаются оригинальные и при этом довольно простые задачи, имеющие приложения в физике, экономике, информатике… Они способны увлечь и расширить кругозор.

Не рассказывают в школе, что у математики есть важнейшие черты, общие с языкознанием, музыкой, живописью, архитектурой…

И, что уж совсем печально, математика в старших классах преподаётся как два слабо зависимых предмета: алгебра и геометрия.

На взгляд автора было бы полезным стереть резкие грани между различными разделами математической науки и усилить её прикладную составляющую.

А. Эйнштейн как-то заметил, что ***«всё нужно сделать настолько простым, насколько возможно, но не проще»***. Этого принципа и буду стараться придерживаться. В тех случаях, когда всё же возникнет необходимость выбора между математической строгостью и ясностью изложения, автор **осознанно** будет отдавать предпочтение ясности. Все математические преобразования представлены в более подробном виде, чем это делается обычно. Но, однако, должен честно предупредить, что чтение не предполагает совсем уж лёгкой прогулки. К сожалению, ***«в математике нет царских путей!».***

Надеюсь, что книжку с интересом прочтут учащиеся, которые планируют стать инженерами, IT–специалистами, экономистами или будут работать в области естественных наук. Тем не менее хочется написать всё так, чтобы и тем, кто мыслит себя «совершенным гуманитарием», также всё оказалось доступно, интересно и полезно. Весь текст старательно адаптирован под уровень знаний ученика 8-9 класса и не предполагает знаний математического анализа.

Глава 1.
ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ ТЕКСТ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕКСТ

*В действительности всё иначе,
чем на самом деле.*
Антуан де Сент-Экзюпери

Представим, что перед нами на столе — текст художественного произведения. Он первозданный, то есть именно такой, каким его создал автор. Мы читаем, и наше сознание создаёт череду связанных с текстом образов. Можно ли сказать, что текст и создаваемые в нашем мозге образы взаимосвязаны **однозначно**? Ясно, что нет! Что бы это понять, достаточно представить себе другого читателя.

Тем более, мы ничего не можем утверждать об эмоциональном восприятии: одним нравится Набоков, а другие терпеть его не могут. Да и сам Набоков, например, считал Достоевского посредственным писателем.

Н. В. Гоголь в поэме «Мёртвые души» подробно, со свойственным ему мастерством, описывает внешность персонажей. Но если мы посмотрим на тех же героев в разных фильмах и спектаклях, то вряд ли найдем абсолютное сходство портретов.

Очевидно, есть трудность однозначной трансформации литературного текста в зрительный образ. Более того, известна проблема идентичного переложения с одного языка на другой даже для прозаического текста, не говоря уже о стихотворном. Существуют, например, разные переводы «Гарри Поттера». Читатель может выбирать, какой из них ему нравится больше.

Аналогично обстоит дело с нотами (музыкальным текстом). Не только профессионалы, но и «продвинутые» любители музыки легко чувствуют разницу в исполнении этюда ля-бемоль мажор Шопена, например, Э. Гилельсом и С. Рихтером. То есть существует и проблема однозначной трансформации нотной записи в звуковой образ.

Возникает вопрос: можно ли так модифицировать запись (текст), чтобы его трансформация в зрительный образ прошла без потерь? Ответ — да. Для этого надо текст сделать математическим. Такой текст записывается в виде формул, специальных математических знаков и иногда сопровождается краткими словесными пояснениями.

Приведём пока лишь в качестве иллюстрации пример математического текста.

Пусть задано множество точек следующей формулой:

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3 \ (\mathbf{1.1}).$$

Изобразить это множество на координатной плоскости.

Результатом будет рисунок 1.1 на следующей странице.

Вполне можно считать, что **«текст»** формулы (**1.1**) **однозначно** отображает рисунок **1.1**.

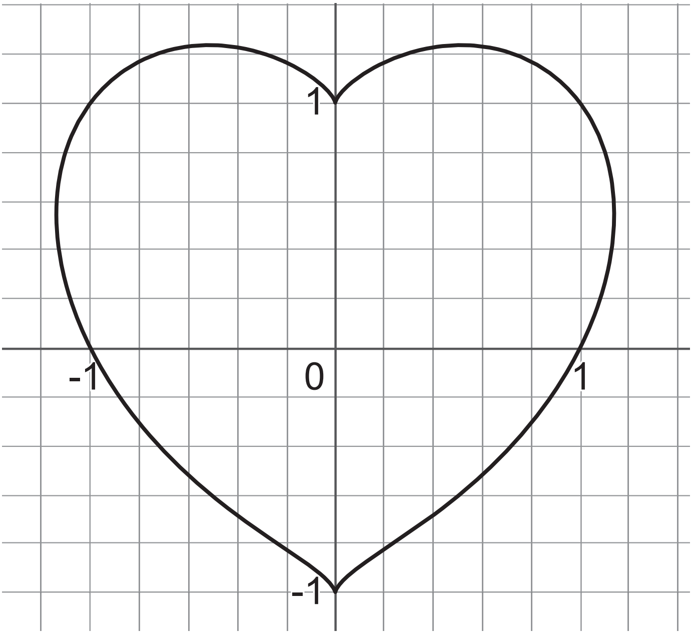


Рис. 1.1

То есть достаточно любому математику в любой стране предъявить эту формулу, и он «увидит» её образ, изображённый на рисунке. Можно даже сказать, что в формуле (**1.1**) «закодирован» рисунок **1.1**. Представьте, что нужно словесно описать, как выглядит эта кривая, с указанием точных размеров. Очевидно, что для этого понадобится много текста!

Какими могут быть формулы, из каких знаков и обозначений они могут состоять, что такое множество и координатная плоскость — об этом речь пойдёт далее.

Глава 2.
О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ

Великая книга природы написана на языке математики.

Галилео Галилей

Невероятные успехи математики оказались возможными лишь благодаря постепенно выработанному специфическому **математическому языку**, позволяющему объединять исследователей, работающих в разных научных областях. Поэтому они понимают друг друга, вне зависимости от их национальностей. Примерно также нотная запись позволяет успешно взаимодействовать музыкантам разных стран мира.

Очевидно, что структура этого языка должна быть гибкой, чтобы он имел возможность развиваться вместе с развитием математической науки. Но вместе с тем — «жёсткой», чтобы любая, написанная фраза допускала лишь единственное толкование (т.е. была строго однозначной). Именно поэтому математики так придирчиво следят за точностью формулировок.

Создание и развитие языка математики облегчается использованием **бинарной логики,** то есть предполагается, что высказывания могут быть только истинными или ложными.

Для краткости и удобства записи используются различные математические знаки и обозначения. Сравним, две записи:

$a + b = c$ и a plus b equal c,

и представим себе, что вторым образом надо записать хотя бы формулу решения квадратного уравнения или решение ещё более сложной задачи.

«Следует заботиться о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи; при этом удивительным образом сокращается работа мышления».

Готфрид Вильгельм Лейбниц

История развития математики как науки насчитывает, по крайней мере, более 3000 лет, но первые современные математические обозначения появились лишь в XVI — XVII веках. Примерно в это время в научных работах начали использоваться такие хорошо известные нам с младшей школы знаки **арифметических действий**:

+ знак сложения; — знак вычитания; **·** знак умножения; **:** знак деления.

Знаки **сравнения:**

= знак равенства; > знак «больше»; < знак «меньше»;

⩾ знак «больше или равно»; ⩽ знак «меньше или равно».

Знаки плюса и минуса впервые использованы в учебнике **Йоханнеса Видмана** «Быстрый и приятный счёт для всех торговцев», изданном в 1489 году. Знак плюс символизировал прибыль, знак минус — убытки. Оба символа вскоре получили распространение в Европе.

Знак умножения в виде косого крестика ввёл в 1631 году англичанин **Уильям Оутред**. Позднее **Готфрид Вильгельм Лейбниц** заменил крестик точкой, чтобы не путать его с буквой $\boldsymbol{x}$.

Знаки > и < ввёл в использование **Томас Хэрриот** (английский астроном, математик, этнограф и переводчик) в своём сочинении, изданном посмертно в 1631 году.

Символы нестрогого сравнения первым предложил английский математик **Джон Валлис** в 1670 году.

Современный символ знака равенства предложил **Роберт Рекорд (**валлийский врач и математик**)** в 1557 году.

Далее у нас будут появляться новые математические знаки, и мы будем вводить их по мере необходимости.

Глава 3.
ВИЗУАЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ

Под визуализацией литературного текста обычно понимают иллюстрации, кино и театр. Но это, конечно, весьма условно. К этому можно, например, добавить и экспозицию в литературном музее, посвящённую роману писателя.

Страницы романа информационно объёмнее. Они вмещают в себя образы героев, какими рисует их наше воображение. А поскольку у каждого оно своё, то и результат у всех будет разный.

Способов визуализации математических данных довольно много: таблицы, диаграммы, **графики**... Нас в наибольшей степени будут интересовать последние. Они, как мы уже видели на примере рис. **1.1**, дают хорошее представление о геометрическом образе формульного выражения.

Это стало возможным благодаря **Рене Декарту** (1596–1650 гг.), который придумал очень хороший способ визуализации не только алгебраических, но и геометрических объектов.

О судьбе и творчестве знаменитого философа и математика написано много. Только в русскоязычном сегменте Википедии указано более 20 источников. Но следует учитывать, что с того времени

прошло более 400 лет, и поэтому многие связанные с жизнью этого безусловно выдающегося человека события обросли легендами.

Напомним, очень кратко, об основных не подвергающихся сомнению фактах.

Рене Декарт родился 31 марта 1596 года во Франции в маленьком городке Лаэ. Он происходил из старинного, но обедневшего дворянского рода. Его мать умерла, когда ему был только 1 год, и воспитанием маленького Рене занималась бабушка по матери. Его отец был судьёй в городе Ренн и приезжал редко.

Начальное образование Декарт получил в иезуитском колледже.

Так как врачи считали, что у мальчика слабое здоровье, то, несмотря на суровую дисциплину в колледже, ему разрешили свободное посещение занятий.

В 1612 году Рене закончил колледж, и некоторое время изучал право в Пуатье, а затем уехал в Париж. Там он впервые начал заниматься математическими исследованиями.

В 1617 году — поступил на военную службу сначала в Голландии, затем в Германии и принимал участие в битве за Прагу в ходе «Тридцатилетней войны» — первой всеевропейской и одной из самых жестоких, упорных и кровопролитных войн в истории Европы. В промежутках между военными действиями Декарт успевал заниматься научной работой в Париже. Затем было ещё несколько лет участия в войне, в том числе — в осаде Ла-Рошели (1628).

Затем Декарт увольняется с военной службы и переезжает в Голландию, где продолжает свои исследования по математике, физике и философии и ведёт обширную переписку с лучшими учёными Европы. Наконец, в 1634 году он заканчивает свою первую программную книгу под названием «Мир», собирается её напечатать. Но момент для издания оказался неудачным, так как годом ранее инквизиция чуть не замучила Галилея. Известно письмо, которое Декарт написал своему другу, французскому математику Мерсенну: ***«Это меня так поразило, что я решил сжечь все свои бумаги, по крайней мере, никому их не показывать; ибо я не в состоянии был вообразить себе, что он, итальянец, пользовавшийся расположением даже Папы, мог быть осуждён за то, без сомнения, что хотел доказать движение Земли… Признаюсь, если движение Земли есть ложь, то ложь и все основания моей философии, так как они явно ведут к этому же заключению».***

Но всё-таки, несмотря на трения с церковью Декарт относительно спокойно мог заниматься наукой, благодаря покровительству кардинала Ришелье и либерального принца Оранского. Поэтому в 1637 году была издана книга «Рассуждение о методе…». Можно считать, что в тот год появился и новый раздел математики — **Аналитическая геометрия**.

К 50 годам Декарт достиг известности и стал всемирно знаменитым учёным. Его жизнь стала спокойной и размеренной, но неожиданно в ней произошёл ещё один крутой поворот: 19-летняя шведская королева Кристина решила заполучить Рене в качестве своего личного учителя и прислала за ним на корабле адмирала Флеминга, и он убедил Декарта перебраться в Швецию. Встретили его в Стокгольме по-королевски, но режим его жизни кардинально изменился. Он должен был начинать занятия в 5 утра и участвовать в работе по организации Шведской королевской Академии наук. Такой «жёсткий» режим дня и суровая зимняя погода Швеции отрицательно сказались на здоровье ученого. Он заболел воспалением лёгких. Несмотря на старания присланных королевой докторов (антибиотиков в то время, к сожалению, ещё не было) 11 февраля 1650 года Рене Декарт ушёл из жизни.

Существует также гипотеза об отравлении Декарта, поскольку симптомы болезни напоминали отравление мышьяком. Якобы католическая церковь опасалась, что общение с учёным-вольнодумцем помешает обращению королевы Кристины в католичество. Это действительно случилось в 1654 году, вскоре после смерти Декарта. Но большинство специалистов с недоверием относятся к этой гипотезе.

Рассмотрим, в чём заключался метод Декарта, на конкретном примере.

Идея состояла в следующем:

- Проведём две взаимно перпендикулярные, пересекающиеся в точке **О** линии (**оси**), как показано на рис. **3.1**.

  Они разобьют всю плоскость на 4 части, которые именно в указанном порядке называют 1, 2, 3 и 4 четвертями. Горизонтальную ось именуют осью **абсцисс** (или **осью *ох***), вертикальную ось — осью **ординат** (или осью ***оу***).