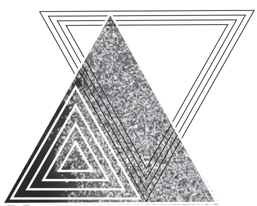
М. Я. Выгодский

СПРАВОЧНИК по ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



Москва
Издательство АСТ
2019

УДК 510(035)
ББК 22.1я2
В92

Выгодский, Марк Яковлевич.

В92 Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. — Москва: Издательство АСТ, 2019. — 703, [1] с.: ил. — (Справочники Выгодского).

ISBN 978-5-17-117741-6

Справочник включает весь материал, входящий в программу основного курса математики высших учебных заведений. Детальная рубрикация и подробный предметный указатель позволяют читателю легко и быстро найти необходимую информацию.

Книга окажет неоценимую помощь студентам, инженерам и научным работникам.

УДК 510(035)
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-17-117741-6

Содержание

I. Аналитическая геометрия на плоскости

II. Аналитическая геометрия в пространстве

III. Основные понятия математического анализа

IV. Дифференциальное исчисление

VII. Ряды

VIII. Дифференцирование и интегрирование функций нескольких аргументов

IX. Дифференциальные уравнения

X. Некоторые замечательные кривые

Таблицы

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Понятие о предмете аналитической геометрии

В *элементарной геометрии* изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

Аналитическая геометрия возникла из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач, с тем чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы.

Эта цель была достигнута созданием *координатного метода* (см. ниже, §§ 2—4). В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методом аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности *Аполлония* (III—II в. до н. э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине XVII века в работах *П. Ферма*[1] и *Р. Декарта*[2]. Они, однако, рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был применен впервые *Л. Эйлером*[3].

§ 2. Координаты

Координатами точки называются такие величины, которые определяют положение этой точки (в пространстве, на плоской или на кривой поверхности, на прямой или кривой линии). Так, если, например, точка M должна лежать где-нибудь на прямой линии $X'X$ (рис. 1), то ее положение можно определить одним числом, например, следующим образом: выбрав на $X'X$ какую-либо начальную точку O, измерим отрезок OM, скажем, в сантиметрах. Мы получим число x, положительное или отрицательное, в зависимости от того, куда направлен отрезок OM (вправо или влево, если прямая горизонтальна). Число x есть координата точки M.

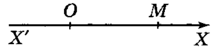


Рис. 1

[1] *Пьер Ферма* (1601—1665) — знаменитый французский математик, один из предшественников Ньютона и Лейбница в разработке дифференциального исчисления; внес большой вклад в теорию чисел. Большинство работ Ферма (в том числе по аналитической геометрии) не публиковалось при жизни автора.

[2] *Рене Декарт* (1596—1650) — знаменитый французский философ и математик. Опубликование его «Геометрии» (одно из приложений к философскому трактату «Рассуждение о методе») в 1637 г. считается (условно) датой рождения аналитической геометрии.

[3] *Леонард Эйлер* (1707—1783) родился в Швейцарии. В 1727 г. прибыл в Россию; работал сначала в качестве адъюнкта (научного сотрудника) Петербургской академии наук, а затем (с 1733 г.) в качестве ее академика. Написал свыше 800 работ. Во всех физико-математических науках сделал важнейшие открытия. Много содействовал развитию русской науки.

Значение координаты x зависит от выбора начальной точки O, от выбора положительного направления на прямой и от того, какой отрезок принят за единицу масштаба.

§ 3. Прямоугольная система координат

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Простейший способ таков.

Проводятся две взаимно перпендикулярные прямые $X'X$, $Y'Y$ (рис. 2). Они называются *осями координат*. Одна из них $X'X$ (обычно ее проводят горизонтально) называется *осью абсцисс*, другая $Y'Y$ — *осью ординат*. Точка O их пересечения называется *началом координат*, или, короче, *началом*. Для измерения отрезков на осях координат выбирается некоторая единица масштаба, произвольная, но одна и та же для обеих осей.

На каждой оси выбирается положительное направление (обозначаемое стрелкой). На рис. 2 луч OX дает положительное направление на оси абсцисс, а луч OY — на оси ординат.

Принято выбирать положительные направления так, чтобы положительный луч OX после поворота на 90° против часовой стрелки совмещался с положительным лучом OY (рис. 3).

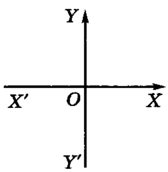


Рис. 2

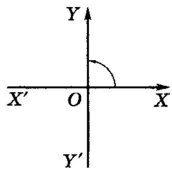


Рис. 3

Оси координат $X'X$, $Y'Y$ (с установленными положительными направлениями и выбранным масштабом) образуют *прямоугольную систему координат*.

§ 4. Прямоугольные координаты

Положение точки M на плоскости в прямоугольной системе координат (§ 3) определяется следующим образом. Проводим $MP \parallel Y'Y$ до пересечения с осью $X'X$ в точке P (рис. 4) и $MQ \parallel X'X$ до пересечения с осью $Y'Y$ в точке Q. Числа x и y, измеряющие отрезки OP и OQ в избранном масштабе (а иногда и сами эти отрезки), называются *прямоугольными координатами* (короче *координатами*) точки M. Эти числа берем положительными или отрицательными в зависимости от направления отрезков OP, OQ. Число x называется *абсциссой* точки M, число y — ее *ординатой*.

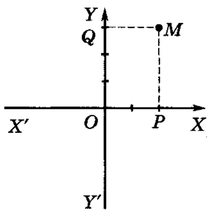


Рис. 4

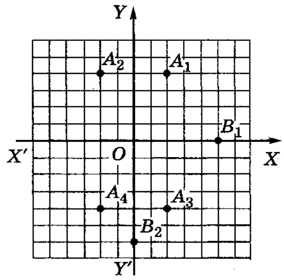


Рис. 5

На рис. 4 точка M имеет абсциссу $x = 2$ и ординату $y = 3$ (при единице масштаба 0,4 см). Это записывается так: $M(2;\ 3)$. Вообще запись $M(a;\ b)$ означает, что точка M имеет абсциссу

$$x = a$$

и ординату

$$y = b.$$

Примеры. Отмеченные на рис. 5 точки регистрируются так: $A_1(+2; +4)$, $A_2(-2; +4)$, $A_3(+2; -4)$, $A_4(-2; -4)$, $B_1(+5; 0)$, $B_2(0; -6)$, $O(0; 0)$.

Замечание. Координаты данной точки M будут иными в другой прямоугольной системе координат.

§ 5. Координатные углы

Четыре угла, образованные осями координат, носят название *координатных углов*. Они нумеруются, как показано на рис. 6. Следующая таблица показывает, какие знаки имеют координаты точки в различных координатных углах:

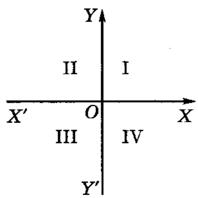


Рис. 6

Координатные углы / Координаты	I	II	III	IV
Абсцисса	+	–	–	+
Ордината	+	+	–	–

На рис. 5 точка A_1 лежит в первом координатном углу, точка A_2 — во втором, точка A_4 — в третьем и точка A_3 — в четвертом.

Если точка лежит на оси абсцисс (например, точка B_1 на рис. 5), то ее ордината y равна нулю. Если точка лежит на оси ординат (например, точка B_2 на рис. 5), то ее абсцисса равна нулю.

§ 6. Косоугольная система координат

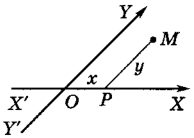


Рис. 7

Кроме прямоугольной системы координат, используются и другие системы. Косоугольная система (она наиболее сходна с прямоугольной) строится так: проводятся две неперпендикулярные прямые $X'X$ и $Y'Y$ (*оси координат*) (рис. 7) и дальше поступают так же, как при построении прямоугольной системы (§ 3). Координаты $x = OP$ (*абсцисса*) и $y = PM$ (*ордината*) определяются так же, как объяснено в § 4.

Прямоугольная и косоугольная системы объединяются под названием *декартовой системы координат.*

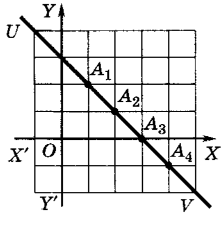
Наряду с декартовой применяются и другие системы координат (наиболее используемая *полярная система*; см. § 73).

§ 7. Уравнение линии

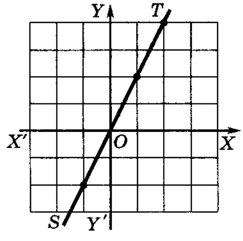
Рассмотрим уравнение $x + y = 3$, связывающее абсциссу x и ординату y. Ему удовлетворяет множество пар значений x, y, например, $x = 1$ и $y = 2$, $x = 2$ и $y = 1$, $x = 3$ и $y = 0$, $x = 4$ и $y = -1$ и т. д. Каждой паре координат (в данной системе координат) соответствует одна точка (§ 4). На рис. 8 *а* изображены точки $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;\ 1)$, $A_3(3;\ 0)$, $A_4(4;\ -1)$. Они лежат на одной прямой UV. На этой же прямой лежит всякая другая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $x + y = 3$. Обратно, у любой точки, лежащей на прямой UV, координаты x, y удовлетворяют уравнению $x + y = 3$.

Согласно с этим говорят: *уравнение $x + y = 3$ есть уравнение прямой линии UV.* Говорят также: *уравнение $x + y = 3$ представляет прямую UV.* В аналогичном смысле надо понимать выражения: «уравнение прямой линии ST (рис. 8 *б*) есть $y = 2x$».

Уравнение $x^2 + y^2 = 49$ представляет окружность (рис. 9), радиус которой содержит 7 масштабных единиц, а центр совмещается с началом координат (см. § 38).



а)



б)

Рис. 8

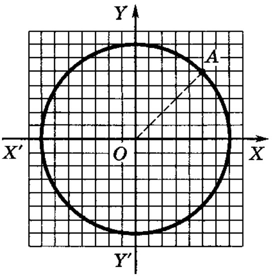


Рис. 9

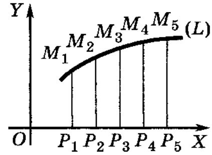


Рис. 10

Вообще *уравнение, связывающее координаты x, y, называется уравнением линии L,* если соблюдены два условия: 1) *координаты x, y всякой точки M линии L удовлетворяют этому уравнению*; 2) *координаты x, y всякой точки, не лежащей на линии L, не удовлетворяют этому уравнению.*

Координаты точки M, взятой на линии L произвольным образом, называют *текущими координатами,* так как линия L может быть образована перемещением («течением») точки M.

Пусть $M_1, M_2, M_3, \ldots$ (рис. 10) — последовательные положения точки M на линии L. Построим ряд перпендикуляров M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ... к оси OX. Получим идущие друг за другом отрезки P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ... На оси OX отсекаются при этом отрезки OP_1, OP_2, OP_3, ... Они будут абсциссами. С этим связано происхождение терминов «абсцисса» и «ордината». Латинское слово «абсцисса» (abscissa) в переводе означает «отсеченная»; слово «ордината» есть сокращение термина «ординатим дукта» (ordinatim ducta), что означает «подряд проведенная».

Представляя каждую точку плоскости ее координатами, а каждую линию — уравнением, связывающим текущие координаты, мы сводим геометрическую задачу к «аналитической» (т. е. вычислительной). Отсюда название « *аналитическая геометрия*».

§ 8. Взаимное расположение линии и точки

Чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка M на некоторой линии L, достаточно знать координаты точки M и уравнение линии L. Если координаты точки M удовлетворяют уравнению линии L, то M лежит на L; в противном случае не лежит.

Пример. Лежит ли точка $M(5; 5)$ на окружности $x^2 + y^2 = 49$ (§ 7)?

Решение. Подставим значения $x = 5$, $y = 5$ в уравнение $x^2 + y^2 = 49$. Так как уравнение не удовлетворяется, то точка M не лежит на рассматриваемой окружности.

§ 9. Взаимное расположение двух линий

Чтобы ответить на вопрос, есть ли у двух линий общие точки и если да, то сколько, достаточно знать уравнения этих линий. Если уравнения совместны, то общие точки есть, в противном случае их нет. Число общих точек равно числу решений системы уравнений.

Пример 1. Прямая линия $x + y = 3$ (§ 7) и окружность $x^2 + y^2 = 49$ имеют две общие точки, так как система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6{,}22, \quad y_1 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3{,}22$$

и

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3{,}22, \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6{,}22.$$

Пример 2. Прямая линия $x + y = 3$ и окружность $x^2 + y^2 = 4$ не имеют общих точек, так как система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

не имеет решений (действительных).

§ 10. Расстояние между двумя точками

Расстояние d между точками $A_1(x_1;\, y_1)$ и $A_2(x_2;\, y_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{1}$$

Пример. Расстояние между точками $M(-2{,}3;\, 4{,}0)$ и $N(8{,}5;\, 0{,}7)$ составляет

$$d = \sqrt{(8{,}5 + 2{,}3)^2 + (0{,}7 - 4)^2} = \sqrt{10{,}8^2 + 3{,}3^2} \approx 11{,}3$$

(масштабных единиц).

Замечание 1. Порядок точек M и N не играет роли; можно N считать первой, а M — второй.

Замечание 2. Расстояние d считается положительным; поэтому в формуле (1) корень берется с одним знаком (плюс).

§ 11. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ (рис. 11). Требуется найти координаты x, y точки K, делящей отрезок A_1A_2, в отношении

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2.$$

Решение дается формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \\ y &= \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

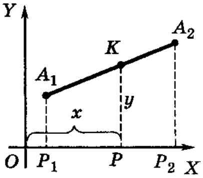


Рис. 11

Если отношение $m_1 : m_2$ обозначить буквой λ, то формулы (1) примут несимметричный вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

Пример 1. Даны точка $B(6;\ -4)$ и точка O, совпадающая с началом координат. Найти точку K, делящую BO в отношении 2 : 3.

Решение. В формулы (1) надо подставить:

$$m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ x_1 = 6,\ y_1 = -4,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0.$$

Получаем:

$$x = \frac{18}{5} = 3{,}6, \quad y = -\frac{12}{5} = -2{,}4.$$

Это — координаты искомой точки K.

Замечание 1. Выражение «точка K делит отрезок A_1A_2 в отношении $m_1 : m_2$» означает, что отношение $m_1 : m_2$ равно отношению отрезков $A_1K : KA_2$, взятых *именно в этом* (а не в обратном) порядке. В примере 1 точка $K(3{,}6;\ -2{,}4)$ делит отрезок BO в отношении 2 : 3, а отрезок OB — в отношении 3 : 2.

Замечание 2. Пусть точка K делит отрезок A_1A_2 *внешним образом,* т. е. лежит на продолжении отрезка A_1A_2, тогда формулы (1) и (2) сохраняют силу, если величине $m_1 : m_2 = \lambda$ приписать отрицательный знак.

Пример 2. Даны точки $A_1(1;\ 2)$ и $A_2(3;\ 3)$. Найти на продолжении отрезка A_1A_2 точку, отстоящую от A_1 вдвое дальше, чем от A_2.

Решение. Имеем $\lambda = m_1 : m_2 = -2$ (так что можно положить $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ или $m_1 = 2$, $m_2 = -1$). По формулам (1) находим:

$$x = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 5, \quad y = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 4.$$