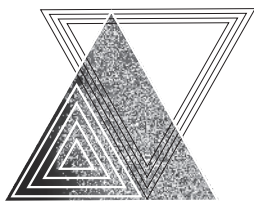


М. Я. Выгодский

**СПРАВОЧНИК  
по ВЫСШЕЙ  
МАТЕМАТИКЕ**



Москва  
Издательство АСТ  
2019

УДК 510(035)  
ББК 22.1я2  
В92

**Выгодский, Марк Яковлевич.**

**В92**     Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. — Москва: Издательство АСТ, 2019. — 703, [1] с.: ил. — (Справочники Выгодского).  
ISBN 978-5-17-117741-6

Справочник включает весь материал, входящий в программу основного курса математики высших учебных заведений. Детальная рубрикация и подробный предметный указатель позволяют читателю легко и быстро найти необходимую информацию.

Книга окажет неоценимую помощь студентам, инженерам и научным работникам.

**УДК 510(035)  
ББК 22.1я2**

**ISBN 978-5-17-117741-6**

© Выгодский М.Я., 2019  
© ООО «Издательство АСТ», 2019

# Содержание

## I. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1. Понятие о предмете аналитической геометрии . . . . .	9	§ 42. Построение эллипса по его осям . . . . .	45
2. Координаты . . . . .	9	43. Гипербола . . . . .	46
3. Прямоугольная система координат . . . . .	10	44. Форма гиперболы; вершины и оси . . . . .	47
4. Прямоугольные координаты . . . . .	10	45. Построение гиперболы по ее осям . . . . .	48
5. Координатные углы . . . . .	11	46. Асимптоты гиперболы . . . . .	48
6. Косоугольная система координат . . . . .	12	47. Сопряженные гиперболы . . . . .	49
7. Уравнение линии . . . . .	12	48. Парабола . . . . .	50
8. Взаимное расположение линии и точки . . . . .	13	49. Построение параболы по данному параметру $p$ . . . . .	51
9. Взаимное расположение двух линий . . . . .	14	§ 50. Парабола как график уравнения $y = ax^2 + bx + c$ . . . . .	51
10. Расстояние между двумя точками . . . . .	14	§ 51. Директрисы эллипса и гиперболы . . . . .	54
11. Деление отрезка в данном отношении . . . . .	15	§ 52. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы . . . . .	55
11а. Деление отрезка пополам . . . . .	16	§ 53. Конические сечения . . . . .	56
12. Определитель второго порядка . . . . .	16	§ 54. Диаметры конического сечения . . . . .	57
13. Площадь треугольника . . . . .	16	§ 55. Диаметры эллипса . . . . .	57
14. Прямая линия; уравнение, разрешенное относительно ординаты (с угловым коэффициентом) . . . . .	17	§ 56. Диаметры гиперболы . . . . .	59
15. Прямая, параллельная оси . . . . .	18	§ 57. Диаметры параболы . . . . .	61
16. Общее уравнение прямой . . . . .	19	§ 58. Линия второго порядка . . . . .	61
17. Построение прямой по ее уравнению . . . . .	20	§ 59. Запись общего уравнения второй степени . . . . .	63
18. Условие параллельности прямых . . . . .	20	§ 60. Упрощение уравнения второй степени; общие замечания . . . . .	63
19. Пересечение прямых . . . . .	22	§ 61. Предварительное преобразование уравнения второй степени . . . . .	64
20. Условие перпендикулярности двух прямых . . . . .	22	§ 62. Завершающее преобразование уравнения второй степени . . . . .	66
21. Угол между двумя прямыми . . . . .	23	§ 63. О приемах, облегчающих упрощение уравнения второй степени . . . . .	71
22. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой . . . . .	25	§ 64. Признак распадаения линий второго порядка . . . . .	71
§ 23. Уравнение прямой, проходящей через две точки . . . . .	26	§ 65. Нахождение прямых, составляющих распадающуюся линию второго порядка . . . . .	72
24. Пучок прямых . . . . .	27	§ 66. Инварианты уравнения второй степени . . . . .	75
25. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой . . . . .	29	§ 67. Три типа линий второго порядка . . . . .	77
§ 26. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой . . . . .	29	§ 68. Центральные и нецентральные линии второго порядка . . . . .	79
§ 27. Взаимное расположение прямой и пары точек . . . . .	30	§ 69. Нахождение центра центральной линии второго порядка . . . . .	80
28. Расстояние от точки до прямой . . . . .	30	§ 70. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка . . . . .	81
29. Полярные параметры прямой . . . . .	31	§ 71. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{k}{x}$ . . . . .	83
30. Нормальное уравнение прямой . . . . .	33	§ 72. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{mx + n}{px + q}$ . . . . .	84
31. Приведение уравнения прямой к нормальному виду . . . . .	34	§ 73. Полярные координаты . . . . .	86
32. Отрезки на осях . . . . .	34	§ 74. Связь между полярными и прямоугольными координатами . . . . .	87
33. Уравнение прямой в отрезках . . . . .	35	§ 75. Архимедова спираль . . . . .	89
34. Преобразование координат (постановка вопроса) . . . . .	36	§ 76. Полярное уравнение прямой . . . . .	90
35. Перенос начала координат . . . . .	36	§ 77. Полярное уравнение конического сечения . . . . .	91
36. Поворот осей . . . . .	37		
37. Алгебраические линии и их порядок . . . . .	38		
38. Окружность . . . . .	40		
39. Нахождение центра и радиуса окружности . . . . .	40		
40. Эллипс как сжатая окружность . . . . .	41		
41. Другое определение эллипса . . . . .	43		

## II. Аналитическая геометрия в пространстве

1. Понятие о векторах и скалярах . . . . .	92	§ 15. Проекция вектора на ось . . . . .	99
2. Вектор в геометрии . . . . .	92	§ 16. Основные теоремы о проекциях вектора . . . . .	101
3. Векторная алгебра . . . . .	92	§ 17. Прямоугольная система координат в пространстве . . . . .	102
4. Коллинеарные векторы . . . . .	92	§ 18. Координаты точки . . . . .	103
5. Нуль-вектор . . . . .	93	§ 19. Координаты вектора . . . . .	103
6. Равенство векторов . . . . .	93	§ 20. Выражения вектора через компоненты и через координаты . . . . .	104
7. Приведение векторов к общему началу . . . . .	94	§ 21. Действия над векторами, заданными своими координатами . . . . .	105
8. Противоположные векторы . . . . .	94	§ 22. Выражение вектора через радиусы-векторы его начала и конца . . . . .	105
9. Сложение векторов . . . . .	94	§ 23. Длина вектора. Расстояние между двумя точками . . . . .	106
10. Сумма нескольких векторов . . . . .	95	§ 24. Угол между осью координат и вектором . . . . .	106
11. Вычитание векторов . . . . .	96		
12. Умножение и деление вектора на число . . . . .	97		
13. Взаимная связь коллинеарных векторов (деление вектора на вектор) . . . . .	98		
§ 14. Проекция точки на ось . . . . .	98		

§ 25. Признак коллинеарности (параллельности) векторов . . . . .	107	§ 75. Параметрические уравнения прямой	148
§ 26. Деление отрезка в данном отношении . . . . .	107	§ 76. Пересечение плоскости с прямой, заданной параметрически . . . . .	149
§ 27. Скалярное произведение двух векторов	108	§ 77. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки . . . . .	150
§ 27а. Физический смысл скалярного произведения . . . . .	109	§ 78. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой . . . . .	150
§ 28. Свойства скалярного произведения . . . . .	109	§ 79. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости . . . . .	150
§ 29. Скалярные произведения основных векторов . . . . .	111	§ 80. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и данную прямую . . . . .	151
§ 30. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей . . . . .	111	§ 81. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум данным прямым . . . . .	151
§ 31. Условие перпендикулярности векторов	112	§ 82. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой данной прямой . . . . .	152
§ 32. Угол между векторами . . . . .	112	§ 83. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости . . . . .	152
§ 33. Правая и левая системы трех векторов	113	§ 84. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую . . . . .	153
§ 34. Векторное произведение двух векторов	114	§ 85. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую . . . . .	154
§ 35. Свойства векторного произведения . . . . .	116	§ 86. Условие, при котором две прямые пересекаются или лежат в одной плоскости . . . . .	155
§ 36. Векторные произведения основных векторов . . . . .	117	§ 87. Уравнения общего перпендикуляра к двум данным прямым . . . . .	156
§ 37. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей . . . . .	117	§ 88. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми . . . . .	158
§ 38. Компланарные векторы . . . . .	119	§ 88а. Правые и левые пары прямых . . . . .	159
§ 39. Смешанное произведение . . . . .	119	§ 89. Преобразование координат . . . . .	160
§ 40. Свойства смешанного произведения	120	§ 90. Уравнение поверхности . . . . .	161
§ 41. Определитель третьего порядка . . . . .	121	§ 91. Цилиндрические поверхности, у которых образующие параллельны одной из осей координат . . . . .	162
§ 42. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей . . . . .	123	§ 92. Уравнения линии . . . . .	163
§ 43. Признак компланарности в координатной форме . . . . .	124	§ 93. Проекция линии на координатную плоскость . . . . .	164
§ 44. Объем параллелепипеда . . . . .	124	§ 94. Алгебраические поверхности и их порядок . . . . .	165
§ 45. Двойное векторное произведение . . . . .	125	§ 95. Сфера . . . . .	166
§ 46. Уравнение плоскости . . . . .	125	§ 96. Эллипсоид . . . . .	167
§ 47. Особые случаи положения плоскости относительно системы координат . . . . .	126	§ 97. Однополостный гиперболоид . . . . .	169
§ 48. Условие параллельности плоскостей . . . . .	127	§ 98. Двуполостный гиперболоид . . . . .	171
§ 49. Условие перпендикулярности плоскостей . . . . .	127	§ 99. Конус второго порядка . . . . .	172
§ 50. Угол между двумя плоскостями . . . . .	128	§ 100. Эллиптический параболоид . . . . .	174
§ 51. Плоскость, проходящая через данную точку параллельно данной плоскости . . . . .	128	§ 101. Гиперболический параболоид . . . . .	175
§ 52. Плоскость, проходящая через три точки	129	§ 102. Перечень поверхностей второго порядка	176
§ 53. Отрезки на осях . . . . .	129	§ 103. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка . . . . .	178
§ 54. Уравнение плоскости в отрезках . . . . .	129	§ 104. Поверхности вращения . . . . .	179
§ 55. Плоскость, проходящая через две точки перпендикулярно данной плоскости . . . . .	130	§ 105. Определители второго и третьего порядков . . . . .	180
§ 56. Плоскость, проходящая через данную точку перпендикулярно двум плоскостям . . . . .	130	§ 106. Определители высших порядков . . . . .	183
§ 57. Точка пересечения трех плоскостей . . . . .	131	§ 107. Свойства определителей . . . . .	185
§ 58. Взаимное расположение плоскости и пары точек . . . . .	132	§ 108. Практический прием вычисления определителей . . . . .	187
§ 59. Расстояние от точки до плоскости . . . . .	132	§ 109. Применение определителей к исследованию и решению системы уравнений . . . . .	189
§ 60. Полярные параметры плоскости . . . . .	133	§ 110. Два уравнения с двумя неизвестными	189
§ 61. Нормальное уравнение плоскости . . . . .	134	§ 111. Два уравнения с тремя неизвестными	191
§ 62. Приведение уравнения плоскости к нормальному виду . . . . .	135	§ 112. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными . . . . .	193
§ 63. Уравнения прямой в пространстве . . . . .	136	§ 113. Три уравнения с тремя неизвестными	194
§ 64. Условие, при котором два уравнения первой степени представляют прямую . . . . .	138	§ 113а. Система л уравнений с л неизвестными . . . . .	197
§ 65. Пересечение прямой с плоскостью . . . . .	138		
§ 66. Направляющий вектор . . . . .	140		
§ 67. Углы между прямой и осями координат	141		
§ 68. Угол между двумя прямыми . . . . .	141		
§ 69. Угол между прямой и плоскостью . . . . .	142		
§ 70. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости . . . . .	143		
§ 71. Пучок плоскостей . . . . .	143		
§ 72. Проекция прямой на координатные плоскости . . . . .	145		
§ 73. Симметричные уравнения прямой . . . . .	146		
§ 74. Приведение уравнений прямой к симметричному виду . . . . .	147		

## III. Основные понятия математического анализа

1. Вводные замечания . . . . .	200	§ 21. Расширение понятия предела . . . . .	217
2. Рациональные числа . . . . .	200	§ 22. Основные свойства бесконечно малых величин . . . . .	218
3. Действительные (вещественные) числа . . . . .	201	§ 23. Основные теоремы о пределах . . . . .	219
4. Числовая ось . . . . .	202	§ 24. Число $e$ . . . . .	220
5. Переменные и постоянные величины . . . . .	202	§ 25. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ . . . . .	221
6. Функция . . . . .	202	§ 26. Эквивалентные бесконечно малые величины . . . . .	222
7. Способы задания функции . . . . .	204	§ 27. Сравнение бесконечно малых величин . . . . .	223
8. Область определения функции . . . . .	206	§ 27а. Приращение переменной величины . . . . .	224
9. Промежуток . . . . .	207	§ 28. Непрерывность функции в точке . . . . .	225
10. Классификация функций . . . . .	208	§ 29. Свойства функций, непрерывных в точке . . . . .	225
11. Основные элементарные функции . . . . .	209	§ 29а. Односторонний предел; скачок функции . . . . .	226
12. Обозначение функции . . . . .	210	§ 30. Непрерывность функции на замкнутом промежутке . . . . .	227
13. Предел последовательности . . . . .	211	§ 31. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке . . . . .	227
14. Предел функции . . . . .	212		
15. Определение предела функции . . . . .	214		
16. Предел постоянной величины . . . . .	215		
17. Бесконечно малая величина . . . . .	215		
18. Бесконечно большая величина . . . . .	215		
19. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами . . . . .	216		
§ 20. Ограниченные величины . . . . .	216		

## IV. Дифференциальное исчисление

1. Вводные замечания . . . . .	229	§ 34. Уравнение нормали . . . . .	263
2. Скорость . . . . .	229	§ 35. Производные высших порядков . . . . .	264
3. Определение производной функции . . . . .	230	§ 36. Механический смысл второй производной . . . . .	265
4. Касательная . . . . .	232	§ 37. Дифференциалы высших порядков . . . . .	266
5. Производные некоторых простейших функций . . . . .	233	§ 38. Выражение высших производных через дифференциалы . . . . .	268
6. Свойства производной . . . . .	234	§ 39. Высшие производные функций, заданных параметрически . . . . .	269
7. Дифференциал . . . . .	234	§ 40. Высшие производные неявных функций . . . . .	269
8. Механический смысл дифференциала . . . . .	235	41. Правило Лейбница . . . . .	270
9. Геометрический смысл дифференциала . . . . .	236	42. Теорема Ролля . . . . .	272
10. Дифференцируемые функции . . . . .	236	43. Теорема Лагранжа о среднем значении . . . . .	272
11. Дифференциалы некоторых простейших функций . . . . .	238	44. Формула конечных приращений . . . . .	274
12. Свойства дифференциала . . . . .	238	§ 45. Обобщенная теорема о среднем значении (Коши) . . . . .	276
13. Инвариантность выражения $f'(x) dx$ . . . . .	239	§ 46. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ . . . . .	278
14. Выражение производной через дифференциалы . . . . .	239	§ 47. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	280
§ 15. Функция от функции (сложная функция) . . . . .	240	§ 48. Неопределенные выражения других видов . . . . .	281
16. Дифференциал сложной функции . . . . .	240	§ 49. Исторические сведения о формуле Тейлора . . . . .	282
17. Производная сложной функции . . . . .	241	§ 50. Формула Тейлора . . . . .	286
18. Дифференцирование произведения . . . . .	242	§ 51. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции . . . . .	287
19. Дифференцирование частного (дроби) . . . . .	243	§ 52. Возрастание и убывание функции . . . . .	294
20. Обратная функция . . . . .	244	§ 53. Признаки возрастания и убывания функции в точке . . . . .	295
21. Натуральные логарифмы . . . . .	245	§ 53а. Признаки возрастания и убывания функции в промежутке . . . . .	296
22. Дифференцирование логарифмической функции . . . . .	246	§ 54. Максимум и минимум . . . . .	296
23. Логарифмическое дифференцирование . . . . .	247	§ 55. Необходимое условие максимума и минимума . . . . .	297
24. Дифференцирование показательной функции . . . . .	248	§ 56. Первое достаточное условие максимума и минимума . . . . .	298
25. Дифференцирование тригонометрических функций . . . . .	249	§ 57. Правило нахождения максимумов и минимумов . . . . .	299
26. Дифференцирование обратных тригонометрических функций . . . . .	250	§ 58. Второе достаточное условие максимума и минимума . . . . .	302
26а. Некоторые поучительные примеры . . . . .	251	§ 59. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции . . . . .	303
27. Дифференциал в приближенных вычислениях . . . . .	253	§ 60. Выпуклость плоских кривых; точка перегиба . . . . .	309
§ 28. Применение дифференциала к оценке погрешности формул . . . . .	254	§ 61. Сторона вогнутости . . . . .	310
29. Дифференцирование неявных функций . . . . .	256		
30. Параметрическое задание линии . . . . .	258		
31. Параметрическое задание функции . . . . .	259		
32. Диклоид . . . . .	260		
33. Уравнение касательной к плоской линии . . . . .	262		
§ 33а. Касательные к кривым второго порядка . . . . .	263		

§ 62. Правило для нахождения точек перегиба . . . . .	311	§ 66. Приемы построения графиков . . . . .	316
§ 63. Асимптоты . . . . .	312	§ 67. Решение уравнений. Общие замечания . . . . .	319
§ 64. Нахождение асимптот, параллельных координатным осям . . . . .	313	§ 68. Решение уравнений. Способ хорд . . . . .	321
§ 65. Нахождение асимптот, не параллельных оси ординат . . . . .	314	§ 69. Решение уравнений. Способ касательных . . . . .	322
		§ 70. Комбинированный метод хорд и касательных . . . . .	324

### V. Интегральное исчисление

§ 1. Вводные замечания . . . . .	327	§ 26. Механический смысл определенного интеграла . . . . .	369
§ 2. Первообразная функция . . . . .	328	§ 27. Оценка определенного интеграла . . . . .	370
§ 3. Неопределенный интеграл . . . . .	329	§ 27а. Неравенство Буяковского . . . . .	371
§ 4. Геометрический смысл интегрирования . . . . .	331	§ 28. Теорема о среднем интегральном исчислении . . . . .	371
§ 5. Вычисление постоянной интегрирования по начальным данным . . . . .	332	§ 29. Определенный интеграл как функция верхнего предела . . . . .	373
§ 6. Свойства неопределенного интеграла . . . . .	333	§ 30. Дифференциал интеграла . . . . .	374
§ 7. Таблица интегралов . . . . .	334	§ 31. Интеграл дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница . . . . .	376
§ 8. Непосредственное интегрирование . . . . .	336	§ 32. Вычисление определенного интеграла с помощью неопределенного . . . . .	377
§ 9. Способ подстановки (интегрирование через вспомогательную переменную) . . . . .	337	§ 33. Определенное интегрирование по частям . . . . .	378
§ 10. Интегрирование по частям . . . . .	340	§ 34. Способ подстановки в определенном интеграле . . . . .	379
§ 11. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений . . . . .	342	§ 35. О несобственных интегралах . . . . .	383
§ 12. Тригонометрические подстановки . . . . .	345	§ 36. Интегралы с бесконечными пределами . . . . .	383
§ 13. Рациональные функции . . . . .	346	§ 37. Интеграл функции, имеющей разрыв . . . . .	387
§ 13а. Исключение целой части . . . . .	347	§ 38. О приближенном вычислении интеграла . . . . .	390
§ 14. О приемах интегрирования рациональных дробей . . . . .	347	§ 39. Формулы прямоугольников . . . . .	392
§ 15. Интегрирование простейших рациональных дробей . . . . .	348	§ 40. Формула трапеций . . . . .	394
§ 16. Интегрирование рациональных функций (общий метод) . . . . .	351	§ 41. Формула Симпсона (параболических трапеций) . . . . .	395
§ 17. О разложении многочлена на множители . . . . .	356	§ 42. Площади фигур, отнесенных к прямоугольным координатам . . . . .	396
§ 18. Об интегрируемости в элементарных функциях . . . . .	357	§ 43. Схема применения определенного интеграла . . . . .	398
§ 19. Некоторые интегралы, зависящие от радикалов . . . . .	358	§ 44. Площади фигур, отнесенных к полярным координатам . . . . .	400
§ 20. Интеграл от биномиального дифференциала . . . . .	359	§ 45. Объем тела по поперечным сечениям . . . . .	401
§ 21. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	361	§ 46. Объем тела вращения . . . . .	403
§ 22. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . . . . .	363	§ 47. Длина дуги плоской линии . . . . .	403
§ 23. Определенный интеграл . . . . .	363	§ 48. Дифференциал дуги . . . . .	405
§ 24. Свойства определенного интеграла . . . . .	367	§ 49. Длина дуги и ее дифференциал в полярных координатах . . . . .	405
§ 25. Геометрический смысл определенного интеграла . . . . .	368	§ 50. Площадь поверхности вращения . . . . .	407

### VI. Основные сведения о плоских и пространственных линиях

§ 1. Кривизна . . . . .	408	§ 14. Производная вектор-функции . . . . .	422
§ 2. Центр, радиус и круг кривизны плоской линии . . . . .	408	§ 15. Дифференциал вектор-функции . . . . .	424
§ 3. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны плоской линии . . . . .	410	§ 16. Свойства производной и дифференциала вектор-функции . . . . .	425
§ 4. Эволюта плоской линии . . . . .	412	§ 17. Соприкасающаяся плоскость . . . . .	426
§ 5. Свойства эволюты плоской линии . . . . .	414	§ 18. Главная нормаль. Сопутствующий трехгранник . . . . .	427
§ 6. Развертка (эвольвента) плоской линии . . . . .	415	§ 19. Взаимное расположение линии и плоскости . . . . .	428
§ 7. Параметрическое задание пространственной линии . . . . .	415	§ 20. Основные векторы сопутствующего трехгранника . . . . .	429
§ 8. Винтовая линия . . . . .	417	§ 21. Центр, ось и радиус кривизны пространственной линии . . . . .	430
§ 9. Длина дуги пространственной линии . . . . .	418	§ 22. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны пространственной линии . . . . .	431
§ 10. Касательная к пространственной линии . . . . .	419	§ 23. О знаке кривизны . . . . .	433
§ 11. Нормальная плоскость . . . . .	420	§ 24. Кручение . . . . .	434
§ 12. Вектор-функция скалярного аргумента . . . . .	421		
§ 13. Предел вектор-функции . . . . .	422		

## VII. Ряды

§ 1. Вводные замечания . . . . .	436	§ 29. Нахождение радиуса сходимости . . . . .	470
§ 2. Определение ряда . . . . .	436	§ 30. Область сходимости ряда, расположенного по степеням $x - x_0$ . . . . .	471
§ 3. Сходящиеся и расходящиеся ряды . . . . .	437	§ 31. Теорема Абеля . . . . .	472
§ 4. Необходимое условие сходимости ряда . . . . .	438	§ 32. Действия со степенными рядами . . . . .	472
§ 5. Остаток ряда . . . . .	440	§ 33. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда . . . . .	474
§ 6. Простейшие действия над рядами . . . . .	441	§ 34. Ряд Тейлора . . . . .	476
§ 7. Положительные ряды . . . . .	442	§ 35. Разложение функции в степенной ряд . . . . .	477
§ 8. Сравнение положительных рядов . . . . .	443	§ 36. Разложение элементарных функций в степенные ряды . . . . .	479
§ 9. Признак Даламбера для положительного ряда . . . . .	444	§ 37. Применение рядов к вычислению интегралов . . . . .	482
§ 10. Интегральный признак сходимости . . . . .	446	§ 38. Гиперболические функции . . . . .	484
§ 11. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница . . . . .	448	§ 39. Обратные гиперболические функции . . . . .	486
§ 12. Абсолютная и условная сходимость . . . . .	449	§ 40. Происхождение наименований гиперболических функций . . . . .	488
§ 13. Признак Даламбера для произвольного ряда . . . . .	450	§ 41. О комплексных числах . . . . .	489
§ 14. Перестановка членов ряда . . . . .	450	§ 42. Комплексная функция действительного аргумента . . . . .	489
§ 15. Группировка членов ряда . . . . .	451	§ 43. Производная комплексной функции . . . . .	491
§ 16. Умножение рядов . . . . .	453	§ 44. Возведение положительного числа в комплексную степень . . . . .	492
§ 17. Деление рядов . . . . .	455	§ 45. Формула Эйлера . . . . .	493
§ 18. Функциональный ряд . . . . .	457	§ 46. Тригонометрический ряд . . . . .	494
§ 19. Область сходимости функционального ряда . . . . .	457	§ 47. Исторические сведения о тригонометрических рядах . . . . .	494
§ 20. О равномерной и неравномерной сходимости . . . . .	459	§ 48. Ортогональность системы функций $\cos nx, \sin nx$ . . . . .	495
§ 21. Определение равномерной и неравномерной сходимости . . . . .	461	§ 49. Формулы Эйлера—Фурье . . . . .	496
§ 22. Геометрический смысл равномерной и неравномерной сходимости . . . . .	461	§ 50. Ряд Фурье . . . . .	498
§ 23. Признак равномерной сходимости; правильные ряды . . . . .	462	§ 51. Ряд Фурье для непрерывной функции . . . . .	499
§ 24. Непрерывность суммы ряда . . . . .	463	§ 52. Ряд Фурье для четной и нечетной функции . . . . .	502
§ 25. Интегрирование рядов . . . . .	464	§ 53. Ряд Фурье для разрывной функции . . . . .	505
§ 26. Дифференцирование рядов . . . . .	467		
§ 27. Степенной ряд . . . . .	468		
§ 28. Промежутки и радиус сходимости степенного ряда . . . . .	468		

## VIII. Дифференцирование и интегрирование функций нескольких аргументов

§ 1. Функция двух аргументов . . . . .	508	§ 20. Дифференцирование сложной функции . . . . .	525
§ 2. Функция трех и большего числа аргументов . . . . .	509	§ 21. Замена прямоугольных координат полярными . . . . .	526
§ 3. Способы задания функций нескольких аргументов . . . . .	509	§ 22. Формулы для производных сложной функции . . . . .	527
§ 4. Предел функции нескольких аргументов . . . . .	511	§ 23. Полная производная . . . . .	527
§ 5. О порядке малости функции нескольких аргументов . . . . .	512	§ 24. Дифференцирование неявной функции нескольких переменных . . . . .	528
§ 6. Непрерывность функции нескольких аргументов . . . . .	514	§ 25. Частные производные высших порядков . . . . .	531
§ 7. Частные производные . . . . .	515	§ 26. Полные дифференциалы высших порядков . . . . .	532
§ 8. Геометрический смысл частных производных для случая двух аргументов . . . . .	515	§ 27. Техника повторного дифференцирования . . . . .	534
§ 9. Полное и частное приращения . . . . .	516	§ 28. Условное обозначение дифференциалов . . . . .	535
§ 10. Частный дифференциал . . . . .	517	§ 29. Формула Тейлора для функции нескольких аргументов . . . . .	535
§ 11. О выражении частной производной через дифференциал . . . . .	517	§ 30. Экстремум (максимум и минимум) функции нескольких аргументов . . . . .	537
§ 12. Полный дифференциал . . . . .	518	§ 31. Правило нахождения экстремума . . . . .	538
§ 13. Геометрический смысл полного дифференциала (случай двух аргументов) . . . . .	520	§ 32. Достаточные условия экстремума (случай двух аргументов) . . . . .	539
§ 14. Инвариантность выражения $f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ полного дифференциала . . . . .	520	§ 33. Двойной интеграл . . . . .	540
§ 15. Техника дифференцирования . . . . .	521	§ 34. Геометрический смысл двойного интеграла . . . . .	541
§ 16. Дифференцируемые функции . . . . .	522	§ 35. Свойства двойного интеграла . . . . .	542
§ 17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	523	§ 36. Оценка двойного интеграла . . . . .	542
§ 18. Уравнение касательной плоскости . . . . .	524	§ 37. Вычисление двойного интеграла (простейший случай) . . . . .	542
§ 19. Уравнения нормали . . . . .	525	§ 38. Вычисление двойного интеграла (общий случай) . . . . .	545
		§ 39. Функция точки . . . . .	548

§ 40. Выражение двойного интеграла через полярные координаты . . . . .	548	§ 50. Момент инерции . . . . .	559
§ 41. Площадь куска поверхности . . . . .	551	§ 51. Выражение некоторых физических и геометрических величин через двойные интегралы . . . . .	561
§ 42. Тройной интеграл . . . . .	553	§ 52. Выражение некоторых физических и геометрических величин через тройные интегралы . . . . .	562
§ 43. Вычисление тройного интеграла (простейший случай) . . . . .	554	§ 53. Криволинейный интеграл . . . . .	563
§ 44. Вычисление тройного интеграла (общий случай) . . . . .	554	§ 54. Механический смысл криволинейного интеграла . . . . .	564
§ 45. Цилиндрические координаты . . . . .	556	§ 55. Вычисление криволинейного интеграла . . . . .	565
§ 46. Выражение тройного интеграла через цилиндрические координаты . . . . .	556	§ 56. Формула Грина . . . . .	566
§ 47. Сферические координаты . . . . .	557	§ 57. Условие, при котором криволинейный интеграл не зависит от пути . . . . .	567
§ 48. Выражение тройного интеграла через сферические координаты . . . . .	557	§ 58. Другая форма условия предыдущего параграфа . . . . .	568
§ 49. Схема применения двойного и тройного интегралов . . . . .	558		

### IX. Дифференциальные уравнения

1. Основные понятия . . . . .	571	§ 15. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов . . . . .	590
2. Уравнение первого порядка . . . . .	572	§ 16. О составлении дифференциальных уравнений . . . . .	592
3. Геометрический смысл уравнения первого порядка . . . . .	573	§ 17. Уравнение второго порядка . . . . .	595
4. Изоклины . . . . .	575	18. Уравнение $n$ -го порядка . . . . .	597
5. Частное и общее решения уравнения первого порядка . . . . .	576	19. Случай понижения порядка . . . . .	597
6. Уравнения с разделенными переменными . . . . .	577	20. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	598
7. Разделение переменных. Особое решение . . . . .	578	21. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	600
8. Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	580	22. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части . . . . .	600
8а. Интегрирующий множитель . . . . .	580	22а. Связь между случаями 1 и 3 § 22 . . . . .	603
9. Однородное уравнение . . . . .	581	23. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью . . . . .	604
10. Линейное уравнение первого порядка . . . . .	583	24. Линейные уравнения любого порядка . . . . .	609
11. Уравнение Клеро . . . . .	585	25. Метод вариации постоянных . . . . .	610
12. Огибающая . . . . .	587	26. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы . . . . .	612
13. Об интегрируемости дифференциальных уравнений . . . . .	588		
§ 14. Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера . . . . .	588		

### X. Некоторые замечательные кривые

1. Стрелоида . . . . .	614	§ 9. Архимедова спираль . . . . .	635
2. Циссоида Диокла . . . . .	616	10. Эвольвента (развертка) круга . . . . .	637
3. Декартов лист . . . . .	617	11. Логарифмическая спираль . . . . .	640
4. Вервьера Аньези . . . . .	619	12. Циклоиды . . . . .	645
5. Конхоида Никомеда . . . . .	621	13. Эпициклоиды и гипоциклоиды . . . . .	657
6. Улитка Паскаля; кардиоида . . . . .	625	14. Трактриса . . . . .	670
7. Линия Кассини . . . . .	629	15. Цепная линия . . . . .	675
8. Лемниската Бернулли . . . . .	633		

### Таблицы

1. Натуральные логарифмы . . . . .	679	3. Таблица для перехода от десятичных логарифмов к натуральным . . . . .	682
2. Таблица для перехода от натуральных логарифмов к десятичным . . . . .	682	4. Таблица неопределенных интегралов . . . . .	683

Предметно-именной указатель . . . . .	691
---------------------------------------	-----



# 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## § 1. Понятие о предмете аналитической геометрии

В *элементарной геометрии* изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

*Аналитическая геометрия* возникла из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач, с тем чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы.

Эта цель была достигнута созданием *координатного метода* (см. ниже, §§ 2—4). В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности *Аполлония* (III—II в. до н. э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине XVII века в работах *П. Ферма*<sup>1)</sup> и *Р. Декарта*<sup>2)</sup>. Они, однако, рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был применен впервые *Л. Эйлером*<sup>3)</sup>.

## § 2. Координаты

*Координатами точки* называются такие величины, которые определяют положение этой точки (в пространстве, на плоской или на кривой поверхности, на прямой или кривой линии). Так, если, например, точка *M* должна лежать где-нибудь на прямой линии *X'X* (рис. 1), то ее положение можно определить одним числом, например, следующим образом: выбрав на *X'X* какую-либо начальную точку *O*, измерим отрезок *OM*, скажем, в сантиметрах. Мы получим число *x*, положительное или отрицательное, в зависимости от того, куда направлен отрезок *OM* (вправо или влево, если прямая горизонтальна). Число *x* есть координата точки *M*.

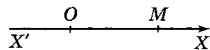


Рис. 1

<sup>1)</sup> *Пьер Ферма* (1601—1665) — знаменитый французский математик, один из предшественников Ньютона и Лейбница в разработке дифференциального исчисления; внес большой вклад в теорию чисел. Большинство работ Ферма (в том числе по аналитической геометрии) не публиковалось при жизни автора.

<sup>2)</sup> *Рене Декарт* (1596—1650) — знаменитый французский философ и математик. Опубликование его «Геометрии» (одно из приложений к философскому трактату «Рассуждение о методе») в 1637 г. считается (условно) датой рождения аналитической геометрии.

<sup>3)</sup> *Леонард Эйлер* (1707—1783) родился в Швейцарии. В 1727 г. прибыл в Россию; работал сначала в качестве адъюнкта (научного сотрудника) Петербургской академии наук, а затем (с 1733 г.) в качестве ее академика. Написал свыше 800 работ. Во всех физико-математических науках сделал важнейшие открытия. Много содействовал развитию русской науки.

Значение координаты  $x$  зависит от выбора начальной точки  $O$ , от выбора положительного направления на прямой и от того, какой отрезок принят за единицу масштаба.

### § 3. Прямоугольная система координат

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Простейший способ таков.

Проводятся две взаимно перпендикулярные прямые  $X'X$ ,  $Y'Y$  (рис. 2). Они называются *осями координат*. Одна из них  $X'X$  (обычно ее проводят горизонтально) называется *осью абсцисс*, другая  $Y'Y$  — *осью ординат*. Точка  $O$  их пересечения называется *началом координат*, или, короче, *началом*. Для измерения отрезков на осях координат выбирается некоторая единица масштаба, произвольная, но одна и та же для обеих осей.

На каждой оси выбирается положительное направление (обозначаемое стрелкой). На рис. 2 луч  $OX$  дает положительное направление на оси абсцисс, а луч  $OY$  — на оси ординат.

Принято выбирать положительные направления так, чтобы положительный луч  $OX$  после поворота на  $90^\circ$  против часовой стрелки совмещался с положительным лучом  $OY$  (рис. 3).

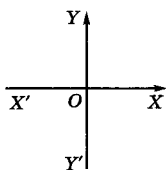


Рис. 2

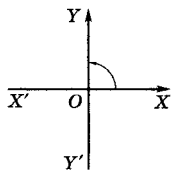


Рис. 3

Оси координат  $X'X$ ,  $Y'Y$  (с установленными положительными направлениями и выбранным масштабом) образуют *прямоугольную систему координат*.

### § 4. Прямоугольные координаты

Положение точки  $M$  на плоскости в прямоугольной системе координат (§ 3) определяется следующим образом. Проводим  $MP \parallel Y'Y$  до пересечения с осью  $X'X$  в точке  $P$  (рис. 4) и  $MQ \parallel X'X$  до пересечения с осью  $Y'Y$  в точке  $Q$ . Числа  $x$  и  $y$ , измеряющие отрезки  $OP$  и  $OQ$  в избранном масштабе (а иногда и сами эти отрезки), называются *прямоугольными координатами* (короче *координатами*) точки  $M$ . Эти числа берем положительными или отрицательными в зависимости от направления отрезков  $OP$ ,  $OQ$ . Число  $x$  называется *абсциссой* точки  $M$ , число  $y$  — ее *ординатой*.

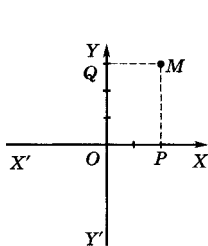


Рис. 4

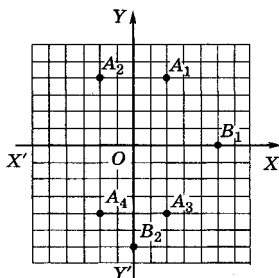


Рис. 5

На рис. 4 точка  $M$  имеет абсциссу  $x = 2$  и ординату  $y = 3$  (при единице масштаба  $0,4$  см). Это записывается так:  $M(2; 3)$ . Вообще запись  $M(a; b)$  означает, что точка  $M$  имеет абсциссу

$$x = a$$

и ординату

$$y = b.$$

Примеры. Отмеченные на рис. 5 точки регистрируются так:  $A_1(+2; +4)$ ,  $A_2(-2; +4)$ ,  $A_3(+2; -4)$ ,  $A_4(-2; -4)$ ,  $B_1(+5; 0)$ ,  $B_2(0; -6)$ ,  $O(0; 0)$ .

З а м е ч а н и е. Координаты данной точки  $M$  будут иными в другой прямоугольной системе координат.

### § 5. Координатные углы

Четыре угла, образованные осями координат, носят название *координатных углов*. Они нумеруются, как показано на рис. 6. Следующая таблица показывает, какие знаки имеют координаты точки в различных координатных углах:

Координатные углы	I	II	III	IV
Координаты				
Абсцисса	+	-	-	+
Ордината	+	+	-	-

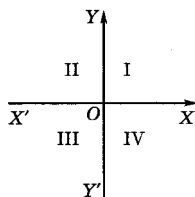


Рис. 6

На рис. 5 точка  $A_1$  лежит в первом координатном углу, точка  $A_2$  — во втором, точка  $A_4$  — в третьем и точка  $A_3$  — в четвертом.

Если точка лежит на оси абсцисс (например, точка  $B_1$  на рис. 5), то ее ордината  $y$  равна нулю. Если точка лежит на оси ординат (например, точка  $B_2$  на рис. 5), то ее абсцисса равна нулю.

### § 6. Косоугольная система координат

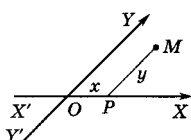


Рис. 7

Кроме прямоугольной системы координат, используются и другие системы. Косоугольная система (она наиболее сходна с прямоугольной) строится так: проводятся две неперпендикулярные прямые  $X'X$  и  $Y'Y$  (оси координат) (рис. 7) и далее поступают так же, как при построении прямоугольной системы (§ 3). Координаты  $x = OP$  (абсцисса) и  $y = PM$  (ордината) определяются так же, как объяснено в § 4.

Прямоугольная и косоугольная системы объединяются под названием *декартовой системы координат*.

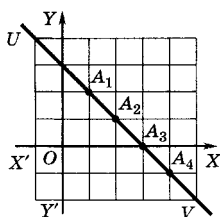
Наряду с декартовой применяются и другие системы координат (наиболее используемая *полярная система*; см. § 73).

### § 7. Уравнение линии

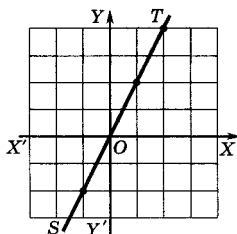
Рассмотрим уравнение  $x + y = 3$ , связывающее абсциссу  $x$  и ординату  $y$ . Ему удовлетворяет множество пар значений  $x, y$ , например,  $x = 1$  и  $y = 2$ ,  $x = 2$  и  $y = 1$ ,  $x = 3$  и  $y = 0$ ,  $x = 4$  и  $y = -1$  и т. д. Каждой паре координат (в данной системе координат) соответствует одна точка (§ 4). На рис. 8 а изображены точки  $A_1(1; 2)$ ,  $A_2(2; 1)$ ,  $A_3(3; 0)$ ,  $A_4(4; -1)$ . Они лежат на одной прямой  $UV$ . На этой же прямой лежит всякая другая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению  $x + y = 3$ . Обратное, у любой точки, лежащей на прямой  $UV$ , координаты  $x, y$  удовлетворяют уравнению  $x + y = 3$ .

Согласно с этим говорят: *уравнение  $x + y = 3$  есть уравнение прямой линии  $UV$* . Говорят также: *уравнение  $x + y = 3$  представляет прямую  $UV$* . В аналогичном смысле надо понимать выражения: «уравнение прямой линии  $ST$  (рис. 8 б) есть  $y = 2x$ ».

Уравнение  $x^2 + y^2 = 49$  представляет окружность (рис. 9), радиус которой содержит 7 масштабных единиц, а центр совмещается с началом координат (см. § 38).



а)



б)

Рис. 8

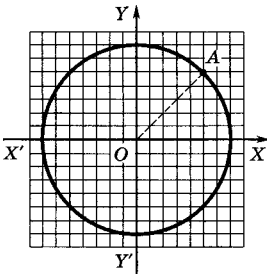


Рис. 9

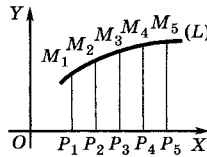


Рис. 10

Вообще уравнение, связывающее координаты  $x, y$ , называется уравнением линии  $L$ , если соблюдены два условия: 1) координаты  $x, y$  всякой точки  $M$  линии  $L$  удовлетворяют этому уравнению; 2) координаты  $x, y$  всякой точки, не лежащей на линии  $L$ , не удовлетворяют этому уравнению.

Координаты точки  $M$ , взятой на линии  $L$  произвольным образом, называют *текущими координатами*, так как линия  $L$  может быть образована перемещением («течением») точки  $M$ .

Пусть  $M_1, M_2, M_3, \dots$  (рис. 10) — последовательные положения точки  $M$  на линии  $L$ . Построим ряд перпендикуляров  $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, \dots$  к оси  $OX$ . Получим идущие друг за другом отрезки  $P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, \dots$ . На оси  $OX$  отсекаются при этом отрезки  $OP_1, OP_2, OP_3, \dots$ . Они будут абсциссами. С этим связано происхождение терминов «абсцисса» и «ордината». Латинское слово «абсцисса» (abscissa) в переводе означает «отсеченная»; слово «ордината» есть сокращение термина «ординатим дукта» (ordinatim ducta), что означает «подряд проведенная».

Представляя каждую точку плоскости ее координатами, а каждую линию — уравнением, связывающим текущие координаты, мы сводим геометрическую задачу к «аналитической» (т. е. вычислительной). Отсюда название «аналитическая геометрия».

### § 8. Взаимное расположение линии и точки

Чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка  $M$  на некоторой линии  $L$ , достаточно знать координаты точки  $M$  и уравнение линии  $L$ . Если координаты точки  $M$  удовлетворяют уравнению линии  $L$ , то  $M$  лежит на  $L$ ; в противном случае не лежит.

**Пример.** Лежит ли точка  $M(5; 5)$  на окружности  $x^2 + y^2 = 49$  (§ 7)?

**Решение.** Подставим значения  $x = 5, y = 5$  в уравнение  $x^2 + y^2 = 49$ . Так как уравнение не удовлетворяется, то точка  $M$  не лежит на рассматриваемой окружности.

### § 9. Взаимное расположение двух линий

Чтобы ответить на вопрос, есть ли у двух линий общие точки и если да, то сколько, достаточно знать уравнения этих линий. Если уравнения совместны, то общие точки есть, в противном случае их нет. Число общих точек равно числу решений системы уравнений.

**Пример 1.** Прямая линия  $x + y = 3$  (§ 7) и окружность  $x^2 + y^2 = 49$  имеют две общие точки, так как система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6,22, \quad y_1 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3,22$$

и

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3,22, \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6,22.$$

**Пример 2.** Прямая линия  $x + y = 3$  и окружность  $x^2 + y^2 = 4$  не имеют общих точек, так как система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

не имеет решений (действительных).

### § 10. Расстояние между двумя точками

Расстояние  $d$  между точками  $A_1(x_1; y_1)$  и  $A_2(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

**Пример.** Расстояние между точками  $M(-2, 3; 4, 0)$  и  $N(8, 5; 0, 7)$  составляет

$$d = \sqrt{(8,5 + 2,3)^2 + (0,7 - 4)^2} = \sqrt{10,8^2 + 3,3^2} \approx 11,3$$

(масштабных единиц).

**З а м е ч а н и е 1.** Порядок точек  $M$  и  $N$  не играет роли; можно  $N$  считать первой, а  $M$  — второй.

**З а м е ч а н и е 2.** Расстояние  $d$  считается положительным; поэтому в формуле (1) корень берется с одним знаком (плюс).

### § 11. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$  (рис. 11). Требуется найти координаты  $x$ ,  $y$  точки  $K$ , делящей отрезок  $A_1A_2$ , в отношении

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2.$$

Решение дается формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \\ y &= \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

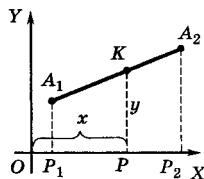


Рис. 11

Если отношение  $m_1 : m_2$  обозначить буквой  $\lambda$ , то формулы (1) примут несимметричный вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

**Пример 1.** Даны точка  $B(6; -4)$  и точка  $O$ , совпадающая с началом координат. Найти точку  $K$ , делящую  $BO$  в отношении  $2 : 3$ .

**Решение.** В формулы (1) надо подставить:

$$m_1 = 2, m_2 = 3, x_1 = 6, y_1 = -4, x_2 = 0, y_2 = 0.$$

Получаем:

$$x = \frac{18}{5} = 3,6, \quad y = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

Это — координаты искомой точки  $K$ .

**Замечание 1.** Выражение «точка  $K$  делит отрезок  $A_1A_2$  в отношении  $m_1 : m_2$ » означает, что отношение  $m_1 : m_2$  равно отношению отрезков  $A_1K : KA_2$ , взятых *именно в этом* (а не в обратном) порядке. В примере 1 точка  $K(3,6; -2,4)$  делит отрезок  $BO$  в отношении  $2 : 3$ , а отрезок  $OB$  — в отношении  $3 : 2$ .

**Замечание 2.** Пусть точка  $K$  делит отрезок  $A_1A_2$  *внешним образом*, т. е. лежит на продолжении отрезка  $A_1A_2$ , тогда формулы (1) и (2) сохранят силу, если величине  $m_1 : m_2 = \lambda$  приписать отрицательный знак.

**Пример 2.** Даны точки  $A_1(1; 2)$  и  $A_2(3; 3)$ . Найти на продолжении отрезка  $A_1A_2$  точку, отстоящую от  $A_1$  вдвое дальше, чем от  $A_2$ .

**Решение.** Имеем  $\lambda = m_1 : m_2 = -2$  (так что можно положить  $m_1 = -2$ ,  $m_2 = 1$  или  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = -1$ ). По формулам (1) находим:

$$x = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 5, \quad y = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 4.$$