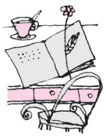
Чтобы учебником было удобно пользоваться, в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,



Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

– задания базового уровня,

– более сложные задания по новым темам и темам повторения,

* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

■ – завершение доказательства теоремы,

* * * – материал для тех, кому интересно.

Глава 1
Развитие математической теории

§ 1. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

1.1.1. Перестановки с повторениями

Кто повторяет старое и узнаёт новое, тот может быть предводителем.

Конфуций (551–479 г. до н.э.),
китайский философ

В 8 классе мы познакомились с разделом математики, который изучает общие законы комбинирования различных объектов, – *комбинаторикой*. Мы вывели одну из формул комбинаторики, которая позволяет найти количество перестановок элементов некоторого множества без их непосредственного перебора. Вспомним, как можно использовать эту формулу, на следующем примере.

Найдём количество всех различных вариантов орнамента, который получается путём перестановки трёх элементов: чёрного и красного квадратов и звёздочки.

□ * □

Мы могли нарисовать все возможные комбинации элементов, последовательно изменяя их порядок:

□□*   □*□   *□□   *□□   □□*   □*□

Быстрее этот результат мы получим, применяя способы, известные нам из 8 класса: правило произведения $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ либо формулу количества перестановок $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

А что если наш орнамент может быть использован только в чёрно-белом варианте? Тогда среди элементов орнамента будет два одинаковых квадрата:

□ * □

В этом случае различных вариантов орнамента будет только три – остальные дублируют ранее выписанные варианты. Вычеркнем их.

□□*   □*□   *□□   ~~*□□~~   ~~□□*~~   ~~□*□~~

Таким образом, при повторениях элементов формула $P_3 = 3!$ не работает, так как она включает все перестановки, в том числе и дубли. Значит, рассчитывать число подобных перестановок нужно как-то иначе. В данном пункте мы найдём общий способ подсчёта количества перестановок элементов множества, учитывающий возможность их *повторений*.

Для этого сравним решения двух аналогичных задач на «старый» и «новый» случаи, чтобы определить, как должен измениться уже известный нам способ для нахождения количества *перестановок с повторениями*.

Задача 1.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи мы должны узнать, сколькими способами можно переставить элементы множества из шести элементов. Используя формулу количества перестановок $P_n = n!$, известную нам из 7 класса, получим:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720 шестизначных чисел.

Задача 2.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры 1, 2, 3 встречаются в числе один раз, а цифра 4 – три раза?

Решение.

В отличие от предыдущей задачи, в наборе цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, с помощью которых мы записываем шестизначные числа, есть повторения – цифры 4, при перестановке которых число меняться не будет. Значит, количество полученных чисел будет меньше, чем в задаче 1. Чтобы его найти, попробуем свести решение нашей новой задачи к уже известному случаю.

Предположим, все цифры 4 разные, например, одна из них красная, другая серая, третья чёрная. Тогда числа, например,

123 444, 123 444, 123 444, 123 444, 123 444, 123 444, –

разные, и количество всех «разноцветных» чисел, как и в предыдущем случае, будет равно 720.

Но в задаче числа – одного цвета, поэтому в действительности все перечисленные выше случаи являются одним и тем же числом 123 444. Следовательно, каждому шестизначному числу, составленному из цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, соответствует столько «разноцветных» чисел, сколько существует различных перестановок из трёх элементов, а именно 3! = 6. Поэтому нужных нам чисел в 6 раз меньше, чем общее количество «разноцветных» чисел. Значит, таких чисел 720 : 6 = 120.

Ответ: 120 чисел.

Решая вторую задачу, мы узнали, что *количество перестановок* 6-*элементного множества с* 3 *повторяющимися элементами* равно $\frac{6!}{3!}$. Обобщая способ, использованный нами для подсчёта вариантов в этой задаче, получаем следующее правило.

Количество перестановок n элементов, среди которых k одинаковых, равно

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k!}.$$

Применим полученное правило к задаче с одноцветным орнаментом. В нём 3 элемента, два из которых повторяются. Поэтому число различных вариантов орнамента равно $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$. Это же число мы получили и при непосредственном пересчёте.

* * *

Теперь выведем формулу решения задач на перестановки с повторениями, принятую в комбинаторике. Для этого сформулируем задачу в общем виде.

Общая постановка задачи.

Сколькими способами можно упорядочить элементы множества из n элементов, в котором:

- элементы a_1 встречаются k_1 раз (то есть в этом множестве k_1 элементов, равных a_1);
- элементы a_2 встречаются k_2 раз;

  ...
- элементы a_m встречаются k_m раз?

При этом $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, и $1 \leqslant k_1 \leqslant n$, $1 \leqslant k_2 \leqslant n$, ... , $1 \leqslant k_m \leqslant n$.

Таким образом, некоторые из чисел k_1, k_2, ..., k_m могут равняться 1, то есть элементы могут не повторяться.

Докажем, что *число перестановок с повторениями* равно $\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$ (если какие-то элементы не повторяются, то соответствующие множители $k!$ в знаменателе равны 1).

Доказательство.

«Раскрасим» все одинаковые элементы в разные цвета так, чтобы все элементы множества можно было считать различными. Тогда перестановок множества «разноцветных» элементов будет всего $n!$

Так как k_1 «разноцветных» элементов, равных a_1, можно представить $k_1!$ способами, k_2 «разноцветных» элементов, равных a_2, $k_2!$ способами и т.д., всего таких «разноцветных» перестановок будет $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$

Для получения ответа нужно общее количество «разноцветных» перестановок, то есть $n!$, разделить на $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$, что и требовалось доказать. ■

Подчеркнём ещё раз, что полученная формула верна и для перестановок без повторений. В этом случае $k_1 = k_2 = ... = k_m = 1$ и формула сводится к известному с 8 класса виду: $P_n = n!$ Поэтому её можно считать универсальной для поиска количества перестановок.

Итак, для подсчёта количества перестановок n элементов некоторого конечного множества будем применять следующую общую формулу.

Общая формула количества перестановок из n элементов

$\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$, где k_1, k_2, ..., k_m – количества повторяющихся элементов.

Рассмотрим примеры применения этой формулы.

Пример 1.

Сколько шестизначных паролей можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, где цифры 1, 2 встречаются ровно один раз, а цифры 3, 4 – ровно два раза?

Решение.

По условию шестизначный пароль составляется из набора цифр 1, 2, 3, 3, 4, 4, где имеется два элемента 3 и 4, которые повторяются по 2 раза.

По общей формуле количества перестановок таких паролей будет

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

(два множителя, равных 1!, соответствующих цифрам 1 и 2, мы не записываем, так как они не влияют на произведение в знаменателе).

Ответ: 180 паролей.

Пример 2.

Сколько различных слов можно написать, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

Решение.

В слове «МАТЕМАТИКА» всего 10 букв, буква А встречается 3 раза, буква М – 2 раза, буква Т – 2 раза, буквы Е, И, К – по одному разу.

По общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\ 200$.

Ответ: 151 200 «слов».

К **1** Для оформления титульного листа своего доклада Саша нарисовала тройную рамку чёрного цвета. Этот вариант показался ей слишком мрачным, и она сделала внутреннюю рамку синей, а внешнюю – фиолетовой. Чтобы выбрать оптимальный вариант оформления, она меняла местами цвета трёх рамок всеми возможными способами и распечатала все полученные варианты (при этом в каждом варианте она использовала все три цвета). Сравнив их, она сделала свой выбор. Сколько различных вариантов титульного листа с разноцветными рамками она напечатала?

2 1) Чем отличаются следующие задачи?

а) Какие различные четырёхзначные коды можно получить, переставляя карточки с цифрами 2, 4, 6, 8? Сколько их?

б) Какие различные четырёхзначные коды можно получить, переставляя местами карточки с цифрами 2, 2, 2, 8 (цифра 2 написана на трёх карточках)? Сколько их?

2) Решите первую задачу известным вам способом. Для нового случая сделайте карточки и проведите перебор. В какой задаче получено меньшее количество вариантов? Почему? В результате каких перестановок полученный числовой код не менялся?

3) Можно ли свести решение новой задачи к уже известному случаю? Что изменится в ходе её решения? Можно ли применить способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех аналогичных задач? Сравните свои выводы о количестве перестановок с повторениями с правилом на с. 6.

3 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «УРАВНЕНИЕ» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

4 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «ПАРАБОЛА»?

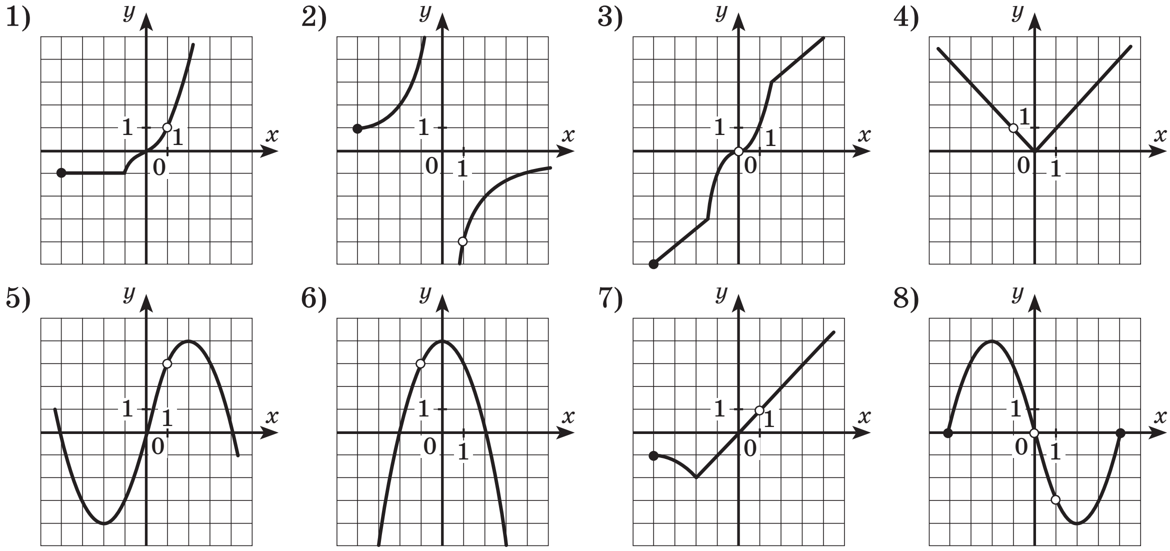
5 Сколько различных «слов» можно составить из пяти букв А и не более чем из трёх букв Б?

П **6** Докажите неравенство $\frac{p}{d} + \frac{d}{p} + \frac{q}{t} + \frac{t}{p} + \frac{a}{s} + \frac{s}{v} + \frac{v}{k} + \frac{k}{a} \geqslant 8$, где числа a, d, k, p, q, s, v, t – положительны.

7 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{16}{x}$ при $x > 0$.

8 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{(x+4)(x+5)}{x}$ при $x > 0$.

9 Этот современный японский прозаик известен тем, что увлекается марафонским бегом и триатлоном, очень любит джаз. ...Он считает, чтобы чего-то достичь, важно научиться ставить перед собой цель. А вы как считаете? Установив соответствие между графиками функций и областью определения функции, узнайте его имя.



У $[-4;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ **И** $[-4;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 4]$ **К** $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$

А $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$ **М** $[-4;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ **Р** $[-4;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

10 Решите графически уравнение:

а) $-4x - 4 = x^2$; в) $-x^2 - 4x = 3x + 10$; д) $\dfrac{0,5}{x} = -5x$;

б) $x^2 - 1 = x + 1$; г) $x^3 = x$; е) $4x + 12 = -\dfrac{8}{x}$.

11 Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x^3, \text{ если } -1 < x < 1; \\ -x - 2, \text{ если } x \leqslant -1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x > 2; \\ |x|, \text{ если } x \leqslant 2; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, \text{ если } |x| \geqslant 2; \\ x, \text{ если } |x| < 2. \end{cases}$

Какие из построенных вами графиков имеют разрывы?

12 Боря точно помнит, что в формуле серной кислоты подряд идут буквы H, S, O и что есть два нижних индекса 2 и 4. Но вот у каких букв стоят эти индексы, он не помнит. У него есть возможность использовать программу, которая по введённой формуле отражает название кислоты. Нарисуйте схему, с помощью которой он переберёт все возможные варианты формулы. Сколько вариантов ему придётся ввести в программу, чтобы определить нужную формулу в «худшем» случае? Можно ли ответить на этот вопрос без схемы?

13 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$.

14 Постройте график функции $y = \dfrac{x - 2}{(\sqrt{x^2 - 2x})^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

15 Бабушка, живущая в Белгороде, отправила 1 сентября четыре посылки своим внукам, живущим в разных городах России. В таблице дано контрольное время в сутках, установленное для пересылки посылок наземным транспортом (без учёта дня приёма) между некоторыми города России.

Пункт отправления	Пункт назначения				
	Владимир	Омск	Петрозаводск	Белгород	Сочи
Владимир		9	12	7	10
Омск	9		11	8	8
Петрозаводск	12	11		11	12
Белгород	8	8	13		9
Сочи	10	9	14	9	

Какая из данных посылок не была доставлена вовремя:

1) пункт назначения – Сочи, посылка доставлена 10 сентября;

2) пункт назначения – Омск, посылка доставлена 9 сентября;

3) пункт назначения – Петрозаводск, посылка доставлена 14 сентября;

4) пункт назначения – Владимир, посылка доставлена 11 сентября?

Д **16** Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в словах «СЕМЬЯ», «КОМАНДА» («словом» считать даже бессмысленный набор букв, противоречащий правилам грамматики)?

17 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{4}{x}$ при $x > 0$.

18 Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -6x + 7$; б) $(x + 2)^2 = -1{,}25x + 4$; в) $\frac{3}{x} = x + 2$.

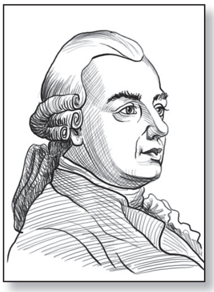
19 Постройте график функции и «прочитайте» его по известному плану:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, \text{ если } x \geqslant 2; \\ \frac{1}{2}x, \text{ если } 0 \leqslant x < 2; \\ -(x + 2)^2 + 4, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Как называется эта функция?

С **20*** Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10 креслами так, чтобы юноши и девушки чередовались?

1.1.2. Размещения



Поиск истины значительно ценнее, чем обладание ею.

Готхольд Лессинг (1729–1781),
немецкий поэт, критик, философ.

В предыдущем пункте мы составляли комбинации из элементов множества, переставляя местами все его элементы. Однако на практике может потребоваться выполнить эту задачу не со всеми элементами множества, а лишь с некоторым их количеством. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение.

Ясно, что комбинировать мы будем не все цифры, а только четыре из шести. Первую из четырёх цифр числа можно выбрать 6 способами; если первая цифра фиксирована, то вторую можно выбрать 5 способами; если первые две цифры фикси-рованы, то третью можно выбрать 4 способами; и наконец, если первые три цифры фиксированы, то четвёртую можно выбрать 3 способами.

Следовательно, искомое количество будет равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Ответ: 360 чисел.

Итак, для ответа на вопрос задачи 1 мы искали, сколькими способами можно разместить четыре из шести элементов множества в определённом порядке. Для этого нам потребовалось составить произведение чисел от 6 до 3.

Обобщив способ подсчёта вариантов в задаче, получаем следующее правило.

Чтобы найти количество вариантов **выбора в определённом порядке k элементов из n ($k \leqslant n$)**, нужно найти произведение k множителей. Первый множитель равен n, а каждый последующий получается уменьшением предыдущего на единицу:

$$\underbrace{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множителей}}$$

Заметим, что при $k = n$ эта задача сводится к задаче определения количества перестановок множества из k элементов, а произведение приобретает известный нам вид: $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов, взятых *в определённом порядке* из n-элементного множества. Такие наборы элементов в комбинаторике называются ***размещениями***.

Определение 1. Упорядоченный набор k элементов из n-элементного множества, где $1 \leqslant k \leqslant n$, называется ***размещением из n по k***.

Количество размещений из n по k обозначается A_n^k (от первой буквы французского слова «arrangement» – расположение, размещение).

Сформулируем и решим задачу поиска A_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества упорядоченный набор из k различных элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$? Другими словами, сколько существует размещений из n по k?

Докажем, что количество размещений A_n^k равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство.

Первый элемент произведения можно выбрать n способами. При фиксированном первом элементе второй можно выбрать $(n-1)$ способом и т.д. Наконец, если первые $(k-1)$ элементов фиксированы, то последний k элемент можно выбрать $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ способами. Таким образом, общее число размещений из n элементов по k равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчёта количества размещений по k элементов из n элементов не-ко-торого конечного множества можно применять следующую формулу.

Формула количества размещений из n элементов по k

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

В восьмом классе изучается 13 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на учебный день, если в этот день должно быть 7 уроков по различным предметам?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи нужно разместить всеми возможными способами в определённом порядке по 7 предметов из 13.

Значит, искомое число способов равно числу размещений по 7 элементов из 13:

$$A_{13}^7 = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 8\ 648\ 640.$$

Ответ: 8 648 640 способами.

Пример 2.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно назначить учащихся на 3 должности: староста, ответственный за участие в спортивных соревнованиях (физорг) и ответственный за организацию развлекательных мероприятий (культорг)?

Решение.

Мы составляем комбинации по 3 фамилии из 28. На первом месте будем писать фамилию старосты, на втором – физорга, а на третьем – культорга. Так как назначение Иванова старостой, а Петрова физоргом, и наоборот, Иванова физоргом, а Петрова старостой – это разные назначения, порядок выбора фамилий существенен. Значит, нам нужно разместить всеми возможными способами в определённом порядке три фамилии из 28. По формуле количества размещений из 28 элементов по 3 искомое число способов равно $A_{28}^3 = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\ 656$.

Ответ: 19 656 способами.

* * *

Произведение $n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ можно записать с помощью понятия факториала. Для этого умножим и разделим произведение $n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ на множители, дополняющие это произведение до $n!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\,(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Поскольку при $k = n$ в знаменателе формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ появляется выражение $0!$, которое пока не определено, нам необходимо придать выражению значение, при котором не возникнет противоречий с имеющимися у нас результатами.

Мы знаем, что при $k = n$ число размещений равно числу перестановок, значит:

$$A_n^n = P_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n!}{(n-k)!} = n! \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} \quad\Leftrightarrow\quad 0! = 1$$

Следовательно, чтобы установленная нами формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ работала при $k = n$, необходимо считать $0! = 1$. Это же значение $0!$ можно вывести и из других соотношений. Так, равенство $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$, верное при всех натуральных $n = 1, 2, \ldots$, при $n = 0$ приобретает вид $1! = 1\cdot 0!$, откуда $0! = 1$.

Поэтому здесь и далее мы будем считать, что $0!$ равен единице.

Определение 2. $0! = 1$.

Заметим, что при $n = 0$ (пустое множество) равенство $P_n = n!$ имеет вид $P_0 = 0! = 1$. Значит, чтобы формулы, содержащие факториалы, оставались верными при $n = 0$, нам надо договориться считать, что число перестановок пустого множества равно 1. При этом также $A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$.

Итак, если принять, что $0! = 1$, то для подсчёта количества размещений по k элементов, взятых из n элементов некоторого конечного множества, можно применять также следующую формулу:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Эту формулу легче запомнить, но её практическое использование требует умения переходить от знака факториала к произведению удобных множителей. Так, в рас-смотренных выше примерах 1 и 2 можно выполнить следующие преобразования:

$$A_{13}^7 = \frac{13!}{6!} = \frac{\overset{1}{\cancel{6!}}\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{\cancel{6!}_1} = 8\ 648\ 640.$$

$$A_{28}^3 = \frac{28!}{25!} = \frac{\overset{1}{\cancel{25!}}\cdot 26\cdot 27\cdot 28}{\cancel{25!}_1} = 19\ 656.$$

К **21** 1) Чем отличаются эти задачи?

а) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

б) Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

2) Решите первую задачу двумя известными вам способами. Какой из них подойдёт для решения второй задачи? Что изменится в ходе её решения? Подойдёт ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

3) Как найти количество вариантов выбора в определённом порядке k элементов из n элементов ($k \leqslant n$)? Сравните свой ответ с правилом на с. 12.

22 Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9? Сколько трёхзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных? Цифры в записи числа не повторяются.

23 Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8? Сколько трёхзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных? Цифры в записи числа не повторяются.

24 В какой из задач необходимо найти количество перестановок элементов множества $\{A, B, C, D\}$:

а) Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

б) Сколькими способами можно обозначить три точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

в) Сколькими способами можно обозначить две точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

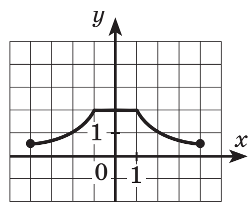
Как называются комбинации, которые следует пересчитать в двух последних задачах? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных комбинаторных задач на с. 12.

25 На странице фотоальбома 3 свободных места для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 6 фотографий, 8 фотографий?

26 На странице фотоальбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 2 фотографии, 4 фотографии?

27 Регистрационный знак российского автомобиля состоит из трёх букв, которые обозначают серию знака, трёх цифр регистрационного номера и цифрового кода региона. Для обозначения серии используются всего 12 букв кириллицы, которые имеют аналоги в латинском алфавите, — А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. Посчитайте, сколько регистрационных знаков может быть выдано в каждом субъекте России.

28 Сколько различных орнаментов может составить программа для дизайна, выстраивая в ряд 10 элементов, среди которых: а) пять одинаковых элементов; б) восемь одинаковых элементов? Все остальные элементы орнамента различны.



29 Задайте формулой функцию, график которой изображён на данном рисунке. Докажите, что она является чётной функцией.

30 Какие из следующих функций являются чётными, а какие нечётными?

а) $y = 0{,}5x^4 - x^2$;   в) $y = x^3 - 2x$;

б) $y = -\dfrac{3}{x} + x$;   г) $y = x^2 + |x| - 2$.

31 а) Для функции $f(x) = x^2$ найдите $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $f(-a)$; $f(a + 5)$.

б) Для функции $f(x) = -x^3$ найдите $f(-2)$; $f(-a)$; $0{,}2 \cdot f(a^2)$.

в) Для функции $f(x) = \frac{1}{x^3}$ найдите $f(0)$; $f(0{,}1a)$; $\frac{1}{f(a^3)}$.

г) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите $f(-4)$; $f(0)$; $f(100)$; $f((a-1)^2)$.

32 Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают ровно 11 часов?

33 Оценив значения выражений, выпишите их в порядке убывания и прочитайте высказывание великого русского писателя Л. Н. Толстого. Как вы понимаете эти слова?

$(0{,}1\sqrt{2})^2$	ВАЖНО	$\sqrt{3}(\sqrt{108}-\sqrt{75})$	ОШИБОЧНО
$-\sqrt{3{,}61}+\sqrt{2{,}89}$	КОЛИЧЕСТВО	$\sqrt{1\frac{155}{169}}:\frac{9}{13}$	ЧТО
$(\sqrt{5}-1)^2-6+3\sqrt{5}$	ДУМАТЬ	$\sqrt{(7+\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{6})^2}$	ЗНАНИЯ
$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$	ЕСТЬ	$\sqrt{0{,}1\cdot 0{,}001^3}$	НЕ
$5\sqrt{2}-4\sqrt{32}+2\sqrt{50}$	А	$\sqrt{45}-\sqrt{80}$	КАЧЕСТВО
$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$	МНОГОЗНАНИЕ	$0{,}01\sqrt{3{,}6\cdot 2{,}5}$	ДОСТОИНСТВО

34 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{5}{x}; \\ y = -5x - 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = (x+2)^2 - 2; \\ y = 4x + 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sqrt{-x}; \\ y = -\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{3}. \end{cases}$

D **35** Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*?

36 Сколькими способами могут быть распределены первый, второй и третий призы между 15 участниками конкурса?

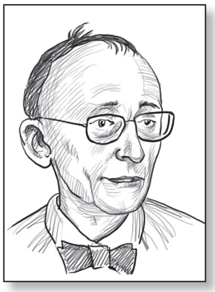
37 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = -\frac{2}{x}; \\ y = -x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -(x-1)^2 + 4; \\ y = -2x + 7. \end{cases}$

38 Расположите числа в порядке возрастания: $3\sqrt{2}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

C **39*** Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, ..., в каждую пятницу – по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни – учебными. В сентябре 30 дней.)

1.1.3. Сочетания



Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.

М. И. Башмаков (1937),
русский математик, учёный-педагог

В предыдущих пунктах мы составляли комбинации из некоторого количества элементов множества, размещая их в *определённом порядке*. Однако на практике выбор элементов из множества нередко осуществляется без учёта порядка. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Переформулируем пример 2 из предыдущего пункта таким образом, чтобы порядок выбора был не существенен.

Задача.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно выбрать трёх учащихся для участия в школьном КВН?

Решение.

В данной задаче, в отличие от примера 2 предыдущего пункта, порядок фамилий в списке неважен, так как роли между учащимися не распределены. Поэтому выбор, например, Иванова, Петрова, Сидорова и выбор Сидорова, Петрова, Иванова – это один и тот же выбор. Таким образом, все списки, отличающиеся только порядком фамилий – Иванов–Петров–Сидоров; Иванов–Сидоров–Петров; Петров–Иванов–Сидоров и т.п. – для нашей задачи являются по сути одним и тем же списком.

Как следует из решения примера 2, если учитывать порядок фамилий, то всех возможных списков было бы $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$. Но среди них имеются лишние списки, дублирующие друг друга. Причём дублирующих списков столько, сколько существует перестановок из трёх фамилий, то есть $3! = 6$. Значит, количество нужных нам вариантов в 6 раз меньше найденного и равно $\frac{19\,656}{6} = 3276$.

Ответ: 3276 способами.

Решая задачу, мы узнали, сколькими способами можно выбрать 3 элемента из 28 элементов множества, не учитывая порядка выбора.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов из n-элементного множества, когда порядок элементов не существенен. Такие наборы элементов называются *сочетаниями*.

Определение 1. Набор k элементов, взятых из n-элементного множества без учёта их порядка, где $1 \leqslant k \leqslant n$, называется ***сочетанием из n по k***.

Количество сочетаний из n по k обозначается C_n^k (от первой буквы французского слова «combinaison» – сочетание).

Сформулируем и решим задачу поиска C_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества набор из k различных элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$, если порядок выбора значения не имеет? Другими словами, сколько существует сочетаний из n по k?

Докажем, что количество сочетаний C_n^k равно $\frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

Доказательство.

Количество упорядоченных наборов по k элементов из n различных элементов равно $A^k{}_n = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Так как в сочетаниях порядок не имеет значения, каждый набор из k элементов при перестановке элементов фактически дублируется P_k раз. Значит, наборов, не учитывающих порядок элементов, будет в P_k раз меньше:

$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчёта количества сочетаний по k элементов из n элементов некото-рого конечного множества можно применять следующую формулу.

Формула количества сочетаний по k элементов из n

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

Для проведения экзамена создается комиссия из трёх преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из семи преподавателей?

Решение.

Так как порядок назначения преподавателей в комиссию роли не играет, искомое число равно $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$.

Ответ: 35 комиссий.

Пример 2.

В шахматном турнире 15 участников, и турнир проводится в один круг (каждые два участника играют между собой один раз). Сколько партий будет сыграно?

Решение.

Искомое количество партий ровно числу способов, которыми можно выбрать двух человек из 15 (порядок роли не играет). Поэтому искомое число способов равно $C_{15}^2 = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$.

Ответ: 105 партий.

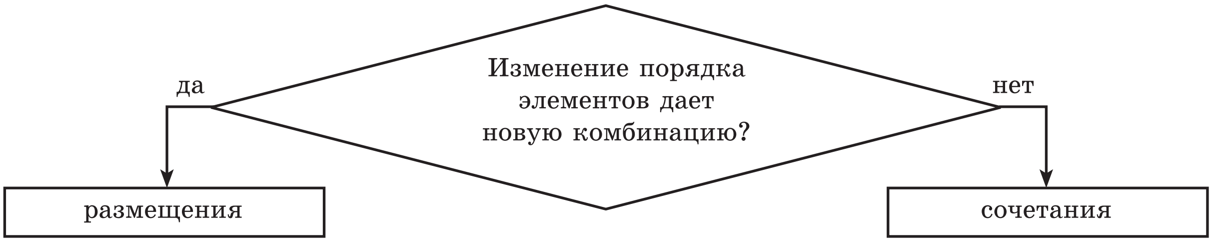
Заметим, что формулу количества сочетаний можно записать также с помощью знака факториала. Действительно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Следовательно, для подсчета числа сочетаний по k элементов из n элементов некоторого конечного множества можно применять ещё одну формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Полученные нами комбинаторные формулы позволяют существенно упростить решение задач, в которых требуется посчитать количество вариантов. Однако правильность решения во многом зависит от того, верно ли выбрана формула. Следующая схема помогает разобраться, о каких комбинациях идёт речь в задаче: о размещениях или сочетаниях.



* * *

Если считать, что $C_n^0 = 1$, то равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ сохраняется при всех $0 \leqslant k \leqslant n$ (запись $n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)$ при $k = 0$ смысла не имеет, так как в ней нет ни одного множителя).

Ясно, что если заменить k на $n - k$, то выражение $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ не изменится. Поэтому

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Так, $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$; $C_n^3 = C_n^{n-3} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$; ...

Числа C_n^k принято называть биномиальными коэффициентами. Эти числа обладают рядом замечательных свойств, которые связывают комбинаторику с другими разделами математики.

Докажем одно интересное свойство биномиальных коэффициентов.

Свойство.

$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Доказательство 1.

Данное тождество можно доказать алгебраическим способом.

Запишем сумму дробей, равных C_n^{k+1} и C_n^k, упростим полученное выражение и применим правило сложения дробей с разными знаменателями:

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1) \cdot (n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = C_{n+1}^{k+1},$$ что и требовалось доказать. ■

Это же тождество можно доказать другим способом, используя комбинаторный смысл биноминальных коэффициентов.

Доказательство 2.

Предположим, что в классе учится $n + 1$ человек, и нам нужно направить на соревнования команду из $k + 1$ учащихся. Сколькими способами это можно сделать?

Согласно формуле количества сочетаний, это число равно C_{n+1}^{k+1}. Но это же число способов можно найти и по-другому.

Выберем одного человека из класса, пусть это будет Вася Иванов. Возможны два варианта: Вася Иванов либо попал в команду, либо нет.

Если Вася будет в команде, то в ней останется k мест, на которые претендуют n школьников. Значит, оставшуюся часть команды можно выбрать C_n^k способами.

Количество команд, в которые Вася не попадает, равно C_n^{k+1}, так как в них на $k + 1$ мест претендуют n школьников (без Васи).

Таким образом, общее число команд равно $C_n^{k+1} + C_n^k$. Следовательно, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, что и требовалось доказать. ■

Доказанное нами свойство использовалось в так называемом треугольнике Паскаля, с помощью которого мы определяли в 7 классе коэффициенты двучлена n-й степени.

Для биномиальных коэффициентов выполняются и другие интересные свойства. Например, то, что наибольшее возможное значение C_{2n}^k при $0 \leqslant k \leqslant 2n$ равно C_{2n}^n (то есть наибольшим является средний из биномиальных коэффициентов). Или свойство суммы биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

К **40** Важен ли порядок указания элементов множества при выборе:

а) двух координат точки на плоскости;
б) шести человек из класса для уборки помещения;
в) трёх новых серий сериала для просмотра;
г) пяти новых серий сериала для скачивания;
д) двух человек из отдела на должность начальника и его заместителя?

41 Сравните списки, чем они отличаются? Какого варианта не хватает? Дополните списки нужным вариантом.

1. Соколова. 2. Сорокина. 3. Синицына.	1. Соколова. 2. Синицына 3. Сорокина.	1. Сорокина 2. Соколова. 3. Синицына.	1. Сорокина. 2. Синицына 3. Соколова	1. Синицына 2. Соколова. 3. Сорокина.

Являются ли данные списки различными, если это варианты:
а) порядка выступлений участниц вокального конкурса?
б) перечня фамилий участниц, прошедших в финал конкурса?

42 1) Чем отличаются эти задачи?

а) В классе учится 10 мальчиков. Для участия в конкурсе учителю следует отобрать троих из них. Сколько существует вариантов таких списков, если учитель указывает, в каком порядке ребята должны выступать в конкурсе?

б) В классе учится 10 мальчиков. Для участия в конкурсе учителю следует отобрать троих из них. Сколько существует вариантов таких списков, если ребята будут выступать в конкурсе одновременно?

2) Решите первую задачу известным вам способом.

3) Можно ли использовать этот способ для решения второй задачи? Что изме-нится в ходе её решения? Подойдёт ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

4) Как найти количество вариантов выбора k элементов из n элементов ($k \leqslant n$), если порядок их выбора не имеет значения?

5) Как называются комбинации, которые следует пересчитать во второй задаче? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных задач.

43 В 8а классе учатся 15 мальчиков.
а) Сколькими способами можно выбрать из них 11 ребят для участия в футбольном турнире?
б) Сколькими способами можно выбрать из них 11 ребят – одного вратаря и 10 полевых игроков – для участия в футбольном турнире?

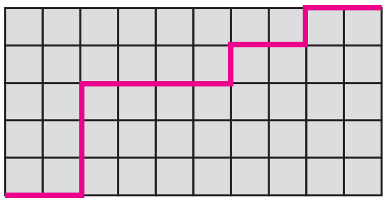
44 На плоскости отмечено n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

45 На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

46 Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59.
а) Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?
б) Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно четыре цифры 3?
в) Сколько времени в течение суток на табло часов горит число, которое читается одинаково слева направо и справа налево?

47 Сколькими способами можно разбить 12 человек на две волейбольные команды по 6 человек в каждой?

48 Дан клетчатый прямоугольник 10×5. Сколько существует различных кратчайших на этой сетке путей, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний угол?



49 На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

50 Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

51 «Проказница Мартышка, Осёл, Козёл и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет».
Сколькими способами они могут усесться на одной лавке?
Сколькими способами из них можно организовать трио?
Сколькими способами выбранное из них трио можно рассадить на одной лавке?

П **52** Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места на соревнованиях, в которых: а) 3 участника; б) 6 участников?

53 Сравните числа:

а) 7 и $\sqrt{42}$; б) $5\sqrt{3}$ и $4\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $\sqrt{19}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

54 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})(\sqrt{13}+2\sqrt{3})$;

б) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$;

в) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;

г) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

д) $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}-\sqrt{(\sqrt{10}-2)^2}$;

е) $(3-\sqrt{11})^2+6\sqrt{20-6\sqrt{11}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

з) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$.

55 Решив уравнение, выясните, какая буква ему соответствует. Выстроив буквы в той же последовательности, что и уравнения, вы получите имя одного из немногих композиторов с Туманного Альбиона, получившего мировое признание. На протяжении всей своей жизни этот британский композитор (XX в.) неустанно работал над собой и считал: «*Учиться – это всё равно что плыть против течения, как только прекращаешь грести, течением тебя относит назад*».

1) $x^2 - 10x - 24 = 0;$

2) $5x^2 + 8x + 6 = 0;$

3) $x - \dfrac{6x}{x+5} = \dfrac{30}{x+5};$

4) $\dfrac{3x+1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x-2} = 1;$

5) $2x^2 - 5x + 3 = 0;$

6) $(3x - 1)(4x + 12) = (2x + 3)(x - 4);$

7) $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0;$

8) $\dfrac{x^2}{x-4} = \dfrac{4x}{x-4};$

9) $\dfrac{6}{x-4} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{6}{x-4} \cdot \dfrac{x}{x+2};$

10) $\dfrac{3x+4}{5} - \dfrac{x^2-4x-6}{10} = -1;$

11) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0;$

12) $0{,}04x^2 = 0;$

13) $x^2 + 3|x| - 4 = 0;$

14) $5 - 5x^2 = 0;$

15) $\dfrac{2x+1}{2x-1} - \dfrac{3(2x-1)}{7(2x+1)} = \dfrac{8x}{4x^2-1};$

16) $x^2 - 12x + 36 = 0.$

$-4; -2; -1; 1$	**М**	$\varnothing$	**Е**	$-2; 12$	**Б**		
$\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**Р**	± 1	**Т**	$3 \pm \sqrt{5}$	**Д**		
0	**И**	6	**Н**	$1; 1{,}5$	**Ж**	$-3{,}7; 0$	**А**

56 В таблице указаны данные отчёта одного из магазинов о количестве проданных порций мороженого в летние и осенние месяцы за последний год.

Июнь	704	Сентябрь	312
Июль	855	Октябрь	204
Август	601	Ноябрь	126

1) Вычислите среднее количество порций мороженого, проданного: а) за один летний месяц; б) за один осенний месяц. Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

2) Найдите медиану данных за летние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за лето показатели продаж? Найдите медиану данных за осенние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за осень показатели продаж? Найдите медиану данных за все эти месяцы.

3) Вычислите размах указанных в таблице значений. Как вы думаете, почему этот показатель такой большой?
Будет ли так велик размах продаж:

а) за летние месяцы;

б) за осенние месяцы?

Проверьте своё предположение, вычислив эти показатели.

Д **57** На школьном конкурсе проектов по истории математики были отобраны 7 лучших работ. Сколькими способами можно выбрать из них два проекта для участия в районом конкурсе?

58 Учащимся дали список из 10 книг, рекомендованных для прочтения на летних каникулах. Олег решил, что более шести книг прочитать не сможет. Сколькими способами он может их выбрать из списка?

59 На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

60 В шахматном кружке занимаются 10 человек. Сколькими способами их тренер может: а) переставить местами их фамилии в списке; б) выбрать из них для предстоящего турнира команду из 4 человек; в) выбрать из них для предстоя-ще-го турнира команду из четырёх человек, указывая, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвёртой досках?

61 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{11} - 2\sqrt{7})(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})$;

б) $\sqrt{(4 - \sqrt{19})^2}$;

в) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^2$;

г) $(2 - \sqrt{7})^2 + 4\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

62 Решите уравнение:

а) $(x - 3)^2 - 2(x - 3) - 15 = 0$;

б) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 6|x| - 72 = 0$;

г) $\frac{x}{x + 3} - \frac{4}{x - 3} = \frac{18}{x^2 - 9}$.

С **63*** Сколькими способами можно разделить класс из 24 человек на четыре команды по шесть человек для игры в волейбол?

64* Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

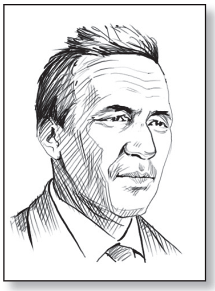
65* Ко дню Российского флага продавец собирается украсить витрину 12 горизонтальными полосками ткани трёх цветов. При этом он выполняет два условия:

1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;

2) каждая синяя полоса должна висеть между белой и красной.

Сколькими способами он может это сделать?

1.1.4. Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность



... математика — единая наука. Всё новые и новые связи возникают между её разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов.

А. Н. Колмогоров (1903–1987),
русский математик, один из основоположников
современной теории вероятностей

Мы знаем, что многие науки связаны с математикой – они используют её вычислительный аппарат, математические модели, алгоритмы. Точно так же и различные разделы математики проникают друг в друга: в одном её разделе используются закономерности, выявленные в другом. Например, для решения геометрических задач используются арифметические расчёты и алгебраические формулы, в свою очередь, геометрические модели помогают решать арифметические и алгебраические задачи и т.д.

Такая ситуация складывается и в теории вероятностей – мы видели, что для оценки вероятности событий, не являющихся равновозможными, нам иногда требуются знания из статистики. В этом пункте мы выясним, знания из каких ещё областей математики применяются при решении вероятностных задач.

Рассмотрим задачу.

Задача 1.

Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 наугад составляется шестизначное число (каждая цифра используется один раз). Чему равна вероятность того, что полученное число будет делиться на 25?

Решение.

Все такие числа равновозможны. Вероятность того, что полученное число будет делиться на 25, равна отношению количества чисел, составленных из цифр от 1 до 6 и кратных 25, к количеству всех чисел, которые можно составить из этих цифр.

По условию, каждая цифра используется в записи числа один раз, поэтому общее количество чисел, составленных из цифр от 1 до 6, равно количеству перестановок из шести элементов: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Чтобы натуральное число делилось на 25, его последние цифры должны быть либо 00, либо 25, либо 50, либо 75. В нашем случае это могут быть только цифры 25. Следовательно, две последние цифры зафиксированы, а из оставшихся четырёх цифр 1, 3, 4 и 6 можно составить $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ вариантов чисел.

Значит, искомая вероятность равна $p = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{1}{30}$.

Ответ: $\dfrac{1}{30}$.

Итак, при расчёте вероятности случайного события нам потребовались методы **комбинаторики**. Рассмотрим ещё несколько примеров применения комбинаторики в теории вероятностей.

Пример 1.

Какова вероятность того, что две подруги Маша и Даша родились в один месяц?

Решение.

Каждая из девочек могла родиться в любом из 12 месяцев (здесь мы делаем до-пущение о равновероятности рождения человека в разные месяцы года). Поэтому событие: «Маша родилась в …» может иметь 12 исходов. Точно также событие «Даша родилась в …» имеет 12 исходов.

Чтобы найти общее число исходов события «Маша родилась в …, а Даша родилась в …», нам необходимо посчитать количество пар, каждый элемент которой может быть выбран 12 способами. На основании правила произведения, известного из комбинаторики, эту пару можно выбрать $12 \cdot 12 = 144$ способами.

Итак, общее число возможных исходов равно 144. Из них благоприятными исходами являются: «обе родились в январе», …, «обе родились в декабре», то есть пары с одинаковыми элементами – всего 12 исходов.

Следовательно, по формуле вероятности получаем: $p = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Пример 2.

У маленького Пети есть три кубика с буквой А, по два кубика с буквами М и Т, по одному кубику с буквами Е, И, К. Петя выложил кубики в ряд. Какова вероятность того, что он выложил слово «МАТЕМАТИКА», если Петя ещё не умеет читать?

Решение.

Все «слова» из кубиков равновозможны. Общее количество исходов равно количеству «слов» из 10 букв, где одна буква (буква А) повторяется 3 раза, а две буквы (М и Т) – по 2 раза. По общей формуле количества перестановок оно равно $P_n = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\ 200$.

Из них лишь один исход благоприятен, так как лишь одно расположение букв составит слово «МАТЕМАТИКА». Значит, искомая вероятность равна $p = \frac{1}{151\ 200}$. Как мы видим, она очень мала.

Ответ: $\frac{1}{151\ 200}$.

Пример 3.

В школьной физической лаборатории 15 мультиметров, два из которых – бракованные. Учитель наугад взял для урока 12 мультиметров. Какова вероятность того, что они все исправные?

Решение.

Общее число исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать 12 мультиметров из 15. Оно равно $C_{15}^{12} = \frac{15!}{12! \cdot (15-12)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ (порядок приборов в выборе учителя не является существенным).

Число благоприятных исходов равно числу способов выбора 12 мультиметров из 13 исправных. Это число есть $C_{13}^{12} = \frac{13!}{12! \cdot (13-12)!} = 13$.

Значит, искомая вероятность равна $p = \frac{13}{455} = \frac{1}{35}$.

Ответ: $\frac{1}{35}$.

При определении вероятности случайного события используется не только комбинаторика, но и другие разделы математики, например геометрия.

Рассмотрим ещё одну задачу.

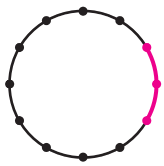
Задача 2.

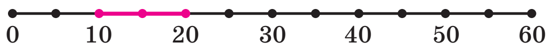
Коля проснулся ночью и взглянул на часы. Какова вероятность того, что в этот момент минутная стрелка показывала на промежуток между 10 и 20 минутами?

Решение.

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых исходы испытаний образуют конечное множество. Здесь же для каждого часа бесконечное число благоприятных исходов $t \in [10; 20]$ выбирается из также бесконечного общего числа исходов $t \in [0; 60]$. Вычислим вероятность этого события, используя геометрическую интерпретацию.

Будем считать, что время пробуждения Пети «равномерно распределено» по одному часу. Изобразим геометрическую модель этой ситуации:





Поэтому искомая вероятность равна отношению длины «благоприятного» временного интервала к длине всего рассматриваемого временного интервала: $p = \dfrac{20 - 10}{60} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

* * *

Замечание. Вернёмся к геометрической интерпретации, которую мы использовали при решении задачи 2. Пусть мы отметили дугу окружности. Вероятность выбрать точку на окружности так, что она попадёт на отмеченную дугу, является отношением длины этой дуги к длине всей окружности. А что будет, если мы отметим не дугу, а всего одну точку A? Какова вероятность выбрать на окружности точку так, чтобы она совпала с отмеченной (A)? Эта вероятность не больше, чем вероятность попадания выбираемой точки на любую дугу, содержащую отмеченную (A). Однако длину такой дуги можно сделать сколь угодно малой. Значит, вероятность того, что выбранная на окружности точка совпадает с отмеченной, равна 0. Однако такое событие не является невозможным.

Значит, из равенства 0 вероятности события не следует невозможность этого события. Аналогично, из равенства вероятности события 1 не следует достоверность этого события.

Таким образом, в случаях, когда число равновозможных исходов бесконечно, вероятности событий можно рассчитать с помощью геометрической интерпретации. Саму вероятность при этом часто называют ***геометрической вероятностью***.

Рассмотрим ещё несколько примеров применения геометрических рассуждений в теории вероятностей.

Пример 4.

Аня тратит на прогулку ровно 1,5 часа и выходит из дома в произвольное время между 16 и 17 часами. Какова вероятность того, что она вернётся домой между 18 и 19 часами?

Решение.

Данное условие будет выполняться, если Аня выходит из дома между 16 ч 30 мин и 17 ч. Поэтому искомая вероятность равна отношению длины благоприятного временного интервала к длине всего временного интервала, то есть $p = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Пример 5.

На отрезке AB длины 10 выбраны точки C и D так, что $AC = 2$, $CD = 3$. Какова вероятность того, что:

1) произвольно выбранная точка отрезка AB лежит на отрезке CD;

2)* произвольно выбранный отрезок EF длины 1, целиком лежащий внутри AB, пересекается с отрезком CD;

3)* произвольно выбранный отрезок EF длины 1, целиком лежащий внутри AB, целиком лежит также внутри CD?

Решение.

1) Искомая вероятность равна отношению длины благоприятного отрезка CD к длине всего отрезка AB:

$p = 3 : 10 = 0{,}3.$

* * *

2) Благоприятным событием является принадлежность левого конца E единичного отрезка EF отрезку KD, где точка K находится левее точки C на единицу.

Длина отрезка KD равна $3 + 1 = 4$, поэтому $p = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

3) Благоприятным событием является принадлежность левого конца E единичного отрезка EF отрезку CL, где точка L находится левее точки D на 1.

Длина отрезка CL равна $3 - 1 = 2$, поэтому $p = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,3; 0,4; 0,2.

Пример 6.

Один из домов, стоящих на окраине деревни, выходит окнами на футбольное поле. Какова вероятность того, что футбольный мяч, попавший в дом, разобьёт стекло в одном из окон (рис. 1)?

Решение.

Будем считать, что мяч попадает в любое место стены дома с одинаковой вероятностью.

Искомая вероятность равна отношению площади, «благоприятствующей искомому событию» (то есть площади окон), ко всей площади стены:

$p = \frac{1 + 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$

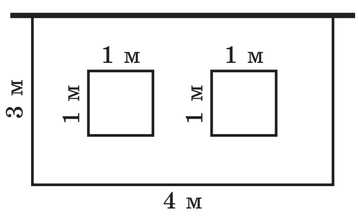


Рис. 1

Ответ: вероятность попадания в окно равна $\frac{1}{6}$.

В последнем примере мы пренебрегли размерами мяча, поскольку иначе он мог бы попасть и в окно, и в стену одновременно. Также мы не рассматривали толщину рамы окна. Вообще в задачах на геометрическую вероятность обычно считается, что размеры предмета очень малы по сравнению с размером места, куда он должен попасть.

Подведём итоги:

Если общее число исходов и число исходов, благоприятствующих событию:

- **велико** – используются ***комбинаторные*** рассуждения и формулы;
- **бесконечно** – используются ***геометрические*** рассуждения и формулы.

К **66** Решите задачи:

1) В ряд выложили красный, синий и зелёный шары. Сколько различных вари-ан-тов возможно получить? Сколько среди них вариантов, в которых красный и синий шары окажутся рядом?

2) В ряд выложили красный, синий и зелёный шары. Чему равна вероятность того, что красный и синий шары окажутся рядом?

Как связаны эти задачи между собой?

67 Решите задачу: «В мешок положили четыре карточки с буквами «О», «Р», «М», «Е». Из мешка их вытаскивают по одной карточке и записывают вытащенные буквы подряд. Чему равна вероятность того, что в итоге записи получится слово «МОРЕ»?»
Знания из какого раздела математики помогли вам найти общее число исходов этого испытания? Сделайте вывод.

68 Решите задачу: «На 90 карточках написаны все числа от 10 до 99 – по одному на каждой карточке. Вася берёт наугад одну карточку. Чему равна вероятность того, что число на карточке будет состоять из разных цифр?» Знания из какого раздела математики помогли вам быстрее найти число благоприятных исходов этого испытания? Сделайте вывод.

69 Из цифр 5, 7, 9 случайным образом составили трёхзначное число, используя все цифры. Чему равна вероятность того, что полученное число:

а) делится на 5; б) начинается на 7.

70 Какова вероятность угадать все 6 чисел в лотерее «6 из 49»?

71 Одновременно бросили 3 кубика. Найдите вероятность того, что:
1) на всех кубиках выпадут одинаковые очки;
2) ровно на двух кубиках выпадут одинаковые очки;
3) на всех кубиках выпадут разные очки.

72 У маленького Пети есть два кубика с буквой И, по одному кубику с буквами Ф, З, К, А. Петя выложил кубики в ряд. Какова вероятность того, что он выложил слово «ФИЗИКА»?

73 В урне 10 шаров: 7 белых и 3 чёрных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

74 В школьной лаборатории 10 микроскопов, два из которых сломались. Ученик, не зная, что среди них есть сломанные, выбрал для урока 6 микроскопов. Какова вероятность того, что они все исправные?

75 1) На отрезке AB длиной 20 см выбраны точки C и D так, что $AC = 5$ см, а $CD = 4$ см. Найдите вероятность того, что произвольно выбранная точка отрезка лежит: а) на отрезке CD; б) на отрезке AC; в) не на отрезке AD.

2) Катя проснулась ночью и взглянула на часы. Какова вероятность того, что в этот момент минутная стрелка показывала на промежуток между 20 и 40 минутами?

Знания из какого раздела математики помогли вам вычислить вероятность в этих задачах? Сделайте вывод.

76 Стрелок, не целясь, стреляет в мишень, площадь которой составляет 300 см^2, и попадает в неё. В центре этой мишени расположен маленький квадрат со стороной 10 см. Найдите вероятность того, что стрелок попал именно в этот квадрат.

П **77** Какие из приведённых событий являются достоверными, невозможными, случайными:

1) при одновременном бросании семи костей на всех выпало разное количество очков;
2) при одновременном бросании семи костей хотя бы на двух из них выпало одинаковое количество очков;
3) при одновременном бросании семи костей на всех выпало одинаковое количество очков;
4) при одновременном бросании семи костей ровно на трёх из них выпало одинаковое количество очков;
5) прямая, проходящая через центр квадрата, разделила его на две равные фигуры;
6) прямая, проходящая через центры двух клеток в клетчатой тетради, образует с границами тетради углы в 45°.

78 Определите, какие из приведённых событий A и B являются совместными, а какие – несовместными.

1) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 22», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 36»;
2) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 18», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 18»;
3) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 8», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 1»;
4) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 24», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 39».

79 Решите квадратное уравнение устно:

а) $x^2 + 11x - 26 = 0$; б) $x^2 + 32x + 87 = 0$; в) $x^2 - x + 6 = 0$.

80 Уравнение $x^2 - 9x + 15 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $3x_1 + 1$ и $3x_2 + 1$.

81 Для корней x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 6x - 2 = 0$ найдите значения выражения:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

82 Один из корней квадратного уравнения $x^2 - 2x + c = 0$ равен $1 + \sqrt{5}$. Найдите другой корень и значение параметра c.

83 Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 + 13x + 12$; б) $-1{,}2x^2 + 5x + 5$; в) $x^2 - 3$; г) $2x^2 + 3x + 4$.

84 Решите задачу:

а) Площадь прямоугольника равна 168 см^2, а его периметр равен 62 см. Найдите стороны прямоугольника.
б) Длины катетов прямоугольного треугольника отличаются на 3 см, а длина гипотенузы больше длины меньшего катета на 6 см. Найдите стороны треугольника.

85 При каких значениях параметра k уравнение $x^2 + 6x + k = 0$ не имеет корней?

86 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a + 2)x + a + 2 = 0$ имеет ровно один корень?

87 При каких значениях параметра m следующее уравнение имеет более двух корней: $(m^2 - 7m + 10)x^2 + (m^2 - 4)x + (3m^2 - 2m - 8) = 0$?

88 Хорошо известные вам термины «абсцисса» (лат. слово abscissa – «отрезанная») и «ордината» (лат. слово ordinatum – «по порядку») впервые были употреблены в 1675 г. и в 1694 г. немецким учёным. Расположив наибольшие значения квадратных трёхчленов на заданных числовых отрезках в порядке возрастания, узнайте имя этого учёного:

$-0{,}25x^2 + x - 4$ на $[1; 3]$	**Е**	$-x^2 + 10x + 3$ на $[0; 4]$	**Ц**
$0{,}3x^2 + 18x + 2$ на $[-10; -1]$	**Л**	$3x^2 - 6x - 4$ на $[-2; 0]$	**И**
$-5x^2 - x + 1$ на $[-0{,}2; -0{,}1]$	**Н**	$-4x^2 + 20x - 25$ на $[0; 10]$	**Б**
$x^2 - 9x - 1$ на $[0; 4{,}5]$	**Й**		

89 На 90 карточках написаны все числа от 10 до 99 – по одному на каждой карточке. Вася берёт наугад одну карточку. Какова вероятность того, что число на карточке будет состоять из нечётных цифр?

90 В урне 10 шаров: 7 белых и 3 чёрных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара чёрные?

91 На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 5$ см, а $CB = 4$ см. Найдите вероятность того, что произвольно выбранная точка отрезка AB лежит на отрезке AC.

92 Каждое утро папа бегает по 1,5 часа и выходит из дома в произвольное время между 5 и 6 часами. Какова вероятность того, что, возвратившись с пробежки, он застанет дома своего сына, который просыпается в 7 утра и уходит в школу в 8 часов?

93 Какие из приведённых событий являются достоверными, невозможными, случайными:

1) первый дождь следующей весной начнётся в четверг;
2) 27 мая в Москве будет $+40^\circ$ С;
3) 27 мая в Москве будет меньше $+40^\circ$ С?

94 Какие из приведённых событий A и B являются совместными, а какие – несовместными?

1) В лыжных гонках: A = «победитель пробежал дистанцию за 23 минуты», B = «пришедший вторым – за 21 минуту»;
2) В лыжных гонках: A = «победитель пробежал дистанцию за 23 минуты», B = «пришедший вторым – за 24 минуты»;
3) В учебнике на пятой странице: A = «нарисованы 3 четырёхугольника», B = «нарисованы только треугольники»;

4) В учебнике на пятой странице: A = «нарисованы 3 четырёхугольника», B = «нарисованы только прямоугольники».

95 Решите устно квадратное уравнение:

а) $x^2 + 18x + 32 = 0$; б) $x^2 - 6x - 91 = 0$; в) $x^2 + x + 5 = 0$.

96 Для корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3x - 10 = 0$ найдите значения выражения $x_1^2 + x_2^2$.

97 Разложите на множители квадратный трёхчлен, если это возможно:

а) $x^2 + 7x - 18$; б) $-9x^2 + 3x + 2$; в) $x^2 - 5$; г) $-x^2 + 2x - 5$.

98 Площадь прямоугольника равна 360 м², а его периметр равен 76 м. Найдите стороны прямоугольника.

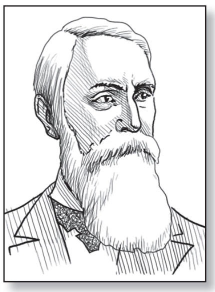
99 При каких значениях параметра t уравнение $x^2 - 8x - t = 0$ не имеет корней?

100 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a - 1)x + a - 1 = 0$ имеет ровно один корень?

C **101*** Два друга-математика договорились встретиться в условленном месте с 12:00 до 13:00. Каждый из них собирается прийти в случайный момент времени из этого промежутка и прождать 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

102* На гранях каждого из 27 кубиков произвольным образом написаны все числа от 1 до 6. Из этих 27 кубиков Вася сложил куб, причем так, что у любых двух кубиков на соприкасающихся гранях записаны числа, отличающиеся ровно на 1. После этого Вася подсчитал суммы чисел, записанных на каждой из граней (этого куба). Мог ли он получить шесть одинаковых сумм?

1.1.5*. Случайные величины и их распределения



Сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием её, она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных.

П. Л. Чебышев (1821–1894),
русский математик и механик

Результатом случайного опыта может быть не только случайное событие, но и некоторая числовая характеристика этого опыта, которую мы будем называть случайной величиной. Например, при случайном выборе человека можно рассматривать случайную величину – его рост в сантиметрах, округлённый до ближайшего целого. При этом разным элементарным событиям может соответствовать одна и та же случайная величина.

Если случайно выбрать точку на числовой прямой, то её координата будет случайной величиной. Эта случайная величина может принимать любое действительное значение.

Изучать такие случайные величины сложно, зачастую для этого требуется знать высшую математику, поэтому в основном мы будем рассматривать случайные величины, принимающие значения из какого-то конечного множества.

Определение 1. Случайная величина, множество значений которой конечно или счётно, называется *дискретной случайной величиной*.

При изучении случайной величины полезно понимать вероятность, с которой она принимает то или иное значение. Например, при нескольких бросаниях монеты количество выпавших «орлов» — случайная величина. Если монетка брошена один раз, то эта случайная величина может принимать всего два значения – 0 или 1, – каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если же было сделано три броска, то эта случайная величина может принимать одно из четырёх значений – 0, 1, 2 и 3. Давайте вычислим вероятность каждого из этих исходов. Для этого выпишем все элементарные события и вычислим значение случайной величины для каждого из них:

Результат первого броска	Результат второго броска	Результат третьего броска	Количество выпавших «орлов»
орёл	орёл	орёл	3
орёл	орёл	решка	2
орёл	решка	орёл	2
орёл	решка	решка	1
решка	орёл	орёл	2
решка	орёл	решка	1
решка	решка	орёл	1
решка	решка	решка	0

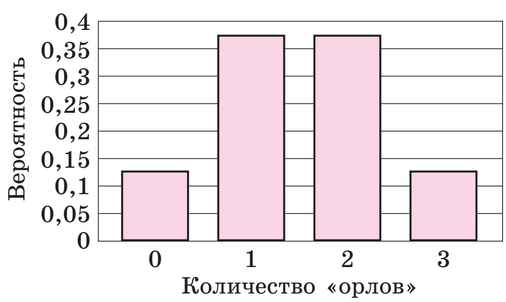
Поэтому вероятности каждого из значений нашей случайной величины такие:

Значение случайной величины	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

В этом случае пишут, что $p(0) = \frac{1}{8}$, $p(1) = \frac{3}{8}$, $p(2) = \frac{3}{8}$ и $p(3) = \frac{1}{8}$.

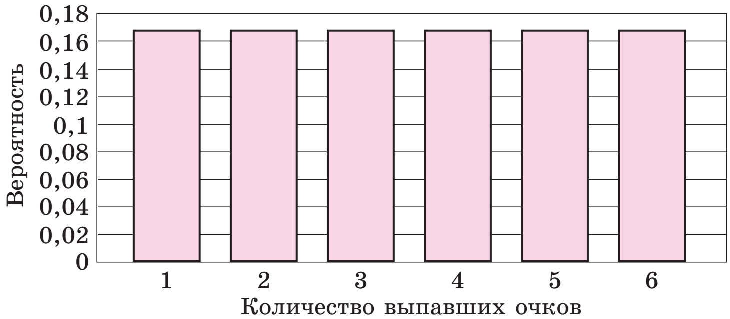
Определение 2. Зависимость вероятности случайной величины от её значения называется *распределением вероятности*.

Распределение вероятности удобно изображать в виде гистограммы. Например, для только что рассмотренного примера она будет выглядеть так:



Если просуммировать вероятности для каждого значения дискретной случайной величины, то получится 1. Действительно, все эти события несовместны и в объединении дают полное пространство элементарных исходов.

Пример 1. При броске игральной кости количество выпавших очков — случайная величина. Очевидно, что вероятность каждого значения равна $\frac{1}{6}$, и распределение вероятности выглядит так:



Определение 3. *Равномерное дискретное распределение* — это распределение дискретной случайной величины, имеющей конечное количество значений, которые случаются с одинаковой вероятностью.

Определение 4. *Распределение Бернулли* — это распределение случайной величины, принимающей два значения – 0 с вероятностью q и 1 с вероятностью p ($p + q = 1$).

Рассмотрим последовательность независимых событий, каждое из которых имеет два возможных исхода (один из них назовём «успехом», другой – «неудачей»). При этом в каждом из этих событий «успех» наступает с вероятностью p ($0 \leqslant p \leqslant 1$), «неудача» – с вероятностью $q = 1 - p$. Такая последовательность событий называется *испытаниями Бернулли*.

Рассмотрим несколько примеров.

а) Подбрасывание монеты, когда успехом считают выпадение орла, неудачей – решки. Испытания независимы, при этом $p = q = \frac{1}{2}$.

б) Подбрасывание кубика, одна из граней которого окрашена в красный цвет, остальные в синий, когда успехом считают выпадение сверху красной грани, неудачей – синей. Ясно, что эти испытания, как и в примере а), независимы, но здесь $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

в) Стрельба по мишени. Считается, что вероятность попадания при одном выстреле равна p, вероятность промаха $q = 1 - p$. Обычно у хороших стрелков вероятность p близка к 1, у плохих она мала.

Остановимся на примере в) подробней. Рассмотрим событие, которое состоит в том, что из n выстрелов стрелок ровно m раз попал в цель, а $n - m$ раз он промахнулся. Иными словами, в n испытаниях достигнуто ровно m успехов. Вероятность такого события обозначим $p_n(m)$. Результаты выстрелов условимся считать независимыми.

Пусть $n = 3$, $m = 1$. Тогда попадание могло произойти при первом выстреле, при втором или при третьем. Допустим, попадание произошло при первом выстреле, а промах при втором и третьем. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что осуществятся все три, равна произведению вероятности попадания при первом выстреле и вероятностей промахов при втором и третьем выстрелах: $p \cdot q \cdot q = pq^2$. В случае попадания при втором или третьем выстреле и промахов в остальных вероятность каждого из этих произведений событий также равна pq^2. Событие, которое состоит в том, что один (какой-то) из выстрелов удачен, а два других нет, является суммой трёх несовместных событий, состоящих в том, что удачен конкретный выстрел (первый, второй или третий), а два других – нет. Поэтому вероятность такого события равна $p_3(1) = 3pq^2$. Коэффициент 3 – это число способов, которыми можно выбрать один элемент (попадание) из трёх (количество выстрелов), то есть C_3^1. Таким образом, $p_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1}$.

В общем случае, если в n выстрелах m попаданий и $n - m$ промахов, то вероятность того, что попадания произойдут при конкретных m выстрелах, равна $p^m q^{n-m}$. Способов, которыми можно выбрать m удачных выстрелов из всех n, всего C_n^m. Поэтому $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Такое распределение вероятностей называется *биномиальным*.

Замечание 1. Мы знаем, что если просуммировать вероятности для каждого значения дискретной случайной величины, то получится 1. Поэтому верно равенство

$$1 = p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + \ldots + p_n(n) = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n q^0.$$

Учтём, что $p + q = 1$, тогда $(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n q^0$.

Пример 2. Найти вероятность того, что при 10 бросаниях монеты «орёл» выпадет ровно 4 раза. Ответ округлить до 3 знаков после запятой.

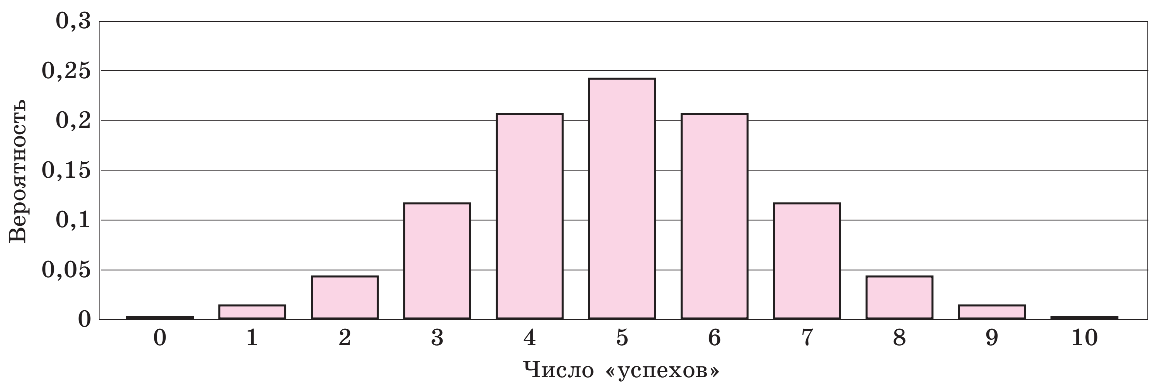
Решение.

Это испытания Бернулли, $p = q = \dfrac{1}{2}$.

$$p_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^{10}} C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2^{10} \cdot 4!} = \frac{105}{512} \approx 0{,}205.$$

Ответ: 0,205.

Биномиальное распределение для 10 подбрасываний монетки выглядит так:



Пример 3. Стрелок пять раз стреляет по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена не менее двух раз. Ответ округлить до 3 знаков после запятой.

Решение.

Нужно просуммировать вероятности 2, 3, 4 или 5 попаданий: $p_5(2) + p_5(3) + p_5(4) + p_5(5)$. Однако проще найти искомую вероятность, заметив, что она равна $1 - p_5(0) - p_5(1)$. Имеем:

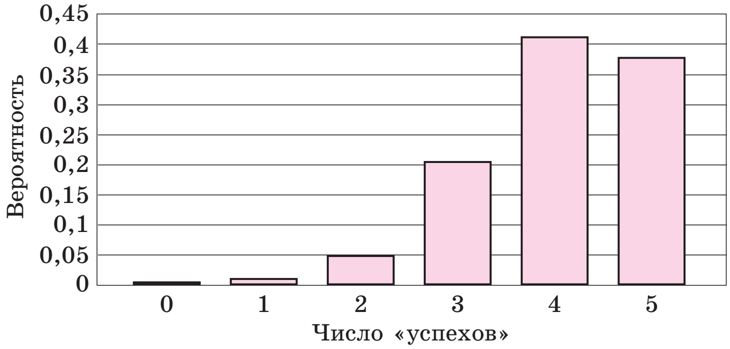
$p_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032;$

$p_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064.$

Искомая вероятность равна $1 - 0{,}00032 - 0{,}0064 = 0{,}99328 \approx 0{,}993$.

Ответ: 0,993.

Биномиальное распределение для 5 выстрелов, если вероятность попадания равна 0,8, выглядит так:



Пример 4. Несколько раз бросают кубик, одна из граней которого красная, остальные – синие. Найти вероятность того, что первый раз красная грань выпадет при четвёртом бросании. Ответ округлить до 3 знаков после запятой.

Решение.

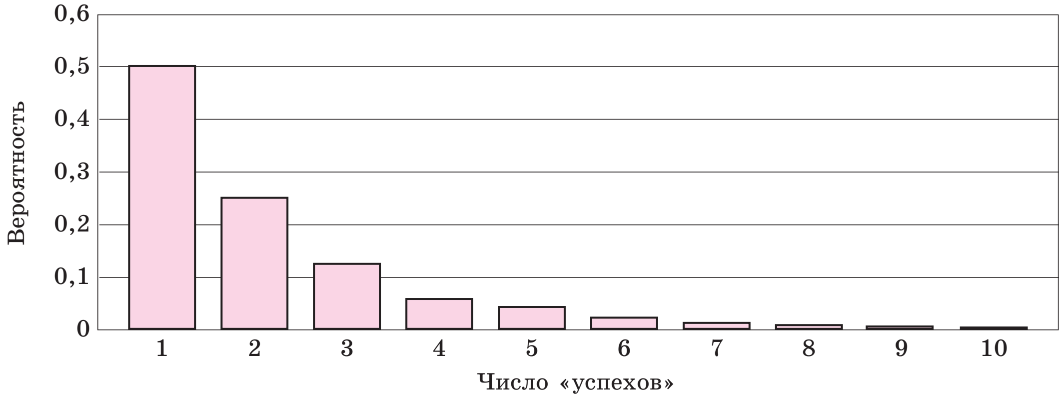
Можно считать, что кубик брошен ровно 4 раза. Тогда это испытания Бернулли с $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 4$, и нас интересует случай, когда в первых трёх бросках выпадает синяя грань, а в четвёртом – красная. Следовательно, искомая вероятность равна

$$q \cdot q \cdot q \cdot p = q^3 p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}096.$$

Ответ: 0,096.

Пример 5. Рассмотрим следующий случайный опыт. Будем подбрасывать монетку до тех пор, пока не выпадет «орёл». В качестве случайной величины будем рассматривать номер попытки, при которой он выпал. Если «орёл» выпал сразу, то случайная величина равна 1, если в первый раз выпала «решка», а во второй раз – «орёл», то случайная величина равна 2, и т.д.

Пользуясь формулой произведения вероятностей в серии независимых событий, несложно подсчитать, что $p(1) = \frac{1}{2}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(3) = \frac{1}{8}$, ..., $p(n) = \frac{1}{2^n}$, ... Таким образом, мы получили пример дискретной случайной величины, множество значений которой счётно. Её распределение вероятности выглядит так:



Такое распределение вероятности случайной величины называется *геометрическим*.

Определение 5. *Геометрическое распределение* — это распределение случайной величины количества испытаний Бернулли до первого «успеха».

Пусть проводится серия одинаковых независимых испытаний, в которых вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» $q = 1 - p$. Тогда распределение вероятности количества испытаний до первого «успеха» будет таким:

Значение случайной величины	1	2	3	4	5	6	7	...
Вероятность	p	qp	q^2p	q^3p	q^4p	q^5p	q^6p	...

Замечание 2. Скоро мы узнаем, что такое распределение вероятности является частным случаем геометрической прогрессии, что и дало название этому распределению.

К **103** Найдите вероятность того, что при трёх бросаниях монеты:

а) «орёл» не выпадет ни разу;
б) «орёл» выпадет ровно один раза;
в) «орёл» выпадет ровно два раза;
г) «орёл» выпадет все три раза.

Сложите полученные вероятности. Попробуйте объяснить результат.

104 В случайном эксперименте дважды бросают игральную кость. Количество бросков, в которых выпала грань с одним очком, является случайной величиной. Найдите её распределение вероятности. Представьте результат в виде таблицы и гистограммы (столбчатой диаграммы).

105 Вася может добраться до школы пешком, а может на автобусе. Автобус ходит довольно редко и по случайному расписанию. Но Вася знает, что если в любой момент времени подождать 10 минут, то вероятность того, что автобус придёт, равна 0,4. Каждое утро Вася ждёт автобус 10 минут и если он не приходит, идёт пешком. Найдите распределение вероятности случайной величины — количества раз, которое Вася поедет в школу на автобусе в течение одной пятидневной учебной недели. Как при решении этой задачи вам помогут испытания Бернулли и биномиальное распределение?

106 В колоде 36 карт. Из колоды случайным образом достают по одной карте до тех пор, пока не достанут карту пиковой масти. Найдите вероятность того, что карту пиковой масти достанут уже на третьей попытке, если:

а) после каждой попытки карту возвращают в колоду и колоду перемешивают;
б*) после каждой попытки карту обратно не возвращают.

П **107** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ 9x - 35 = 8y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{2} - 3y = -2; \\ \dfrac{x - 3y}{2} + 3 = \dfrac{2x + y}{5}. \end{cases}$

108 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x - 15 > 8x + 1; \\ 9x - 6 \geqslant 3x - 54; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 5}{4} > 2x; \\ 1 - 2x < x - \dfrac{2x - 4}{5}. \end{cases}$

109 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} x + y > 1; \\ x - y > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 1 \leqslant 0; \\ x - 2y + 2 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y + 12 > 0; \\ x + 3y - 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Д **110** В случайном эксперименте четыре раза подбрасывают монету. Найдите распределение вероятности случайной величины, равной количеству выпадений «орла». Представьте результат в виде таблицы и гистограммы.

111 Лучник четыре раза стреляет по мишени, вероятность попадания стрелы при каждом выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что мишень будет поражена более двух раз.

112 Две противоположные грани белого кубика покрасили в чёрный цвет. В случайном эксперименте кубик кидают до тех пор, пока не выпадет чёрная сторона. Найдите вероятность того, что чёрная сторона выпадет только при третьем броске.

113 Решите систему:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{2} = 0{,}5; \\ 6x + 4y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8 \leqslant 7x + 10; \\ 2x - 3(x - 5) > 10 - 3x. \end{cases}$

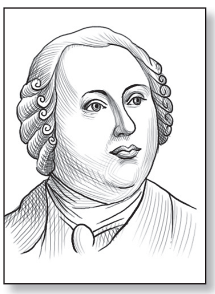
114 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} x - y \leqslant 2; \\ x + y \leqslant -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y + 1 < 0; \\ x + 4y - 4 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 2y - 6 > 0; \\ x - 2y - 2 < 0. \end{cases}$

C **115*** Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трёх подряд идущих чисел была простым числом?

116* Пусть a, b, c – различные натуральные числа с суммой 800. Найдите максимально возможное значение суммы корней уравнения $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$.

1.1.6*. Операции со случайными величинами. Математическое ожидание и дисперсия. Закон больших чисел



О вы, счастливые науки!
Прилежны простирайте руки...
Везде исследуйте всечасно,
Что есть велико и прекрасно,
Чего ещё не видел свет...

М. В. Ломоносов (1711–1765)
русский учёный-естествоиспытатель

Независимые случайные величины

Определение 1. Две случайные величины называются **независимыми**, если знание значения одной из них не даёт никакой дополнительной информации о значении другой.

Иными словами, дискретные случайные величины X и Y являются независимыми, если для любых значений x и y события $\{X = x\}$ и $\{Y = y\}$ независимы. Поэтому

$$p(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = p(\{X = x\}) \cdot p(\{Y = y\}).$$

Полученное свойство можно использовать в качестве эквивалентного определения независимости двух случайных величин.

Сложение, умножение случайных величин

Эксперимент заключается в бросании двух игральных костей. Пусть X – случайная величина, равная количеству очков, выпавших на первой кости, Y – на второй кости. Эти величины независимы. Рассмотрим новую случайную величину $Z = X + Y$ (её значение – сумма очков, выпавших на двух костях). Найдём распределение её вероятности. Наименьшее значение Z равно 2, а наибольшее – 12.

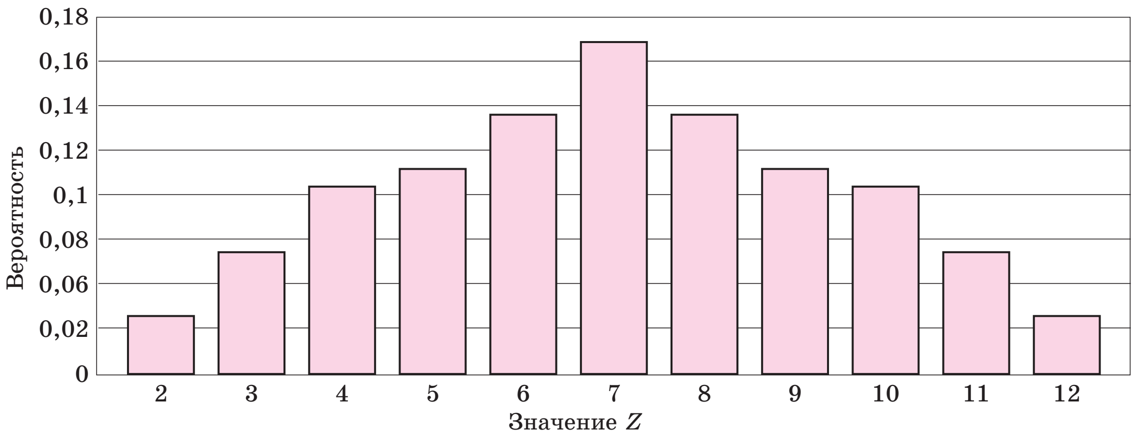
$$p(\{Z = 2\}) = p(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = p(\{X = 1\}) \cdot p(\{Y = 1\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36};$$

$$p(\{Z = 3\}) = p(\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}) + p(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}) =$$
$$= p(\{X = 1\}) \cdot p(\{Y = 2\}) + p(\{X = 2\}) \cdot p(\{Y = 1\}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

...

В итоге получим такое распределение вероятности случайной величины Z:

Значение случайной величины Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

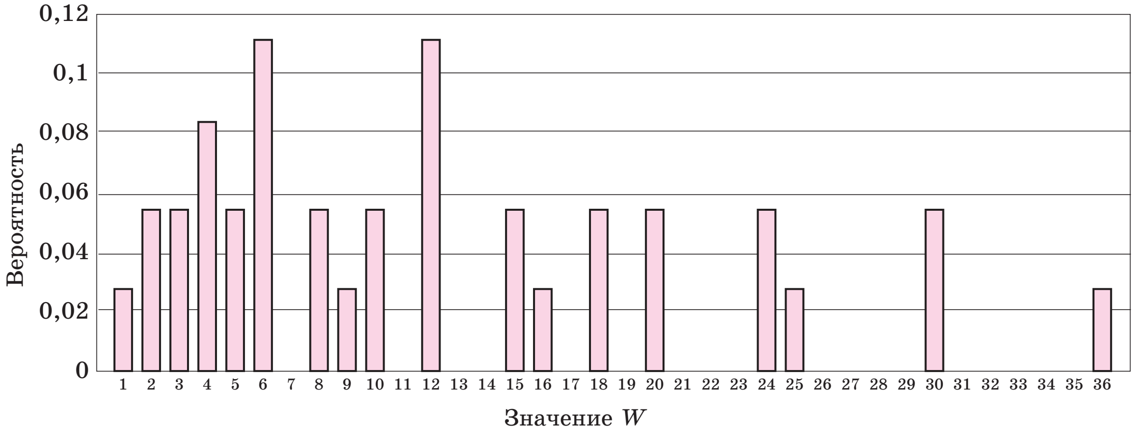


Мы видим, что наиболее вероятно при бросании двух костей получить сумму 7.

Для тех же самых случайных величин X и Y рассмотрим новую случайную величину $W = XY$. Попробуем найти и её распределение. Для того чтобы понять, какие значения она может принимать, заполним «таблицу умножения»:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Так как случайные величины X и Y независимы, вероятность попасть в каждую ячейку таблицы 6×6 равна $\frac{1}{36}$, поэтому распределение вероятности случайной величины W выглядит так:



Математическое ожидание и его свойства

Как мы знаем, чтобы задать распределение случайной величины, используется таблица, содержащая информацию о всех возможных значениях случайной величины и вероятности появления каждого из них. Однако на практике бывает довольно сложно изучать всю таблицу (особенно если она очень большая), и достаточно знать какие-то числовые характеристики случайной величины. Основной характеристикой случайной величины является её математическое ожидание.

Определение 2. Пусть известно распределение вероятности случайной величины X (принимающей конечное число значений):

Значение случайной величины X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Математическим ожиданием случайной величины X называется величина

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Например, математическое ожидание количества очков, выпавших при одном бросании игральной кости, равно

$$1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Замечание. Аналогично доказывается, что математическое ожидание любой случайной величины с равномерным распределением равно среднему арифметическому всех возможных значений этой величины.

У математического ожидания есть три важных свойства.

Пусть X и Y – две случайные величины, а k – фиксированное число, тогда

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$
$$E(kX) = kE(X).$$

При этом, если X и Y – независимые случайные величины, то

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Поэтому, например, в рассмотренной выше задаче про бросание двух игральных костей необязательно вычислять математическое ожидание суммы по определению. Достаточно сказать, что

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Дисперсия случайной величины и её свойства. Стандартное отклонение

Математическое ожидание хорошо характеризует случайную величину, но у него есть один недостаток. Рассмотрим распределения трёх случайных величин.

Значение случайной величины X	9	10	11
Вероятность	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Значение случайной величины Y	6	8	10	12	14
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Значение случайной величины Z	−80	−60	−40	−20	0	20	40	60	80	100
Вероятность	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

У каждой из этих случайных величин математическое ожидание равно 10. Но при этом у случайной величины X значения лежат более «кучно» вокруг математического ожидания, а у случайной величины Z очень большой «разброс» значений.

Для измерения «рассеивания» случайной величины используется понятие дисперсии.

Определение. *Дисперсией* $D(X)$ *случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания:

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

Например, вычислим дисперсию рассмотренных выше случайных величин.

Значение случайной величины $X - E(X)$	−1	0	1
Вероятность	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Значение случайной величины $(X - E(X))^2$	0	1
Вероятность	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Значение случайной величины $Y - E(Y)$	−4	−2	0	2	4
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Значение случайной величины $(Y - E(Y))^2$	0	4	16
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$D(Y) = E((Y - E(Y))^2) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 16 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8 + 32}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

Значение случайной величины $Z - E(Z)$	−90	−70	−50	−30	−10	10	30	50	70	80
Вероятность	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Значение случайной величины $(Z - E(Z))^2$	100	900	2500	4900	8100
Вероятность	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$D(Z) = E((Z - E(Z))^2) =$$
$$= 100 \cdot \frac{1}{5} + 900 \cdot \frac{1}{5} + 2500 \cdot \frac{1}{5} + 4900 \cdot \frac{1}{5} + 8100 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16500}{5} = 3300.$$

Мы видим, что чем больше разброс значений, тем больше дисперсия.

Однако у дисперсии есть один недостаток. Так как она меряет квадрат отклонения от математического ожидания, она имеет размерность, отличную от размерности исходной случайной величины. Например, если случайная величина измеряется в метрах, то её дисперсия – в квадратных метрах. Поэтому для оценки «разброса» значений случайной величины вместо дисперсии используется *стандартное отклонение* – квадратный корень из дисперсии:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}.$$

В рассмотренных выше примерах получаем:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8,$$
$$\delta(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{8} \approx 2{,}8,$$
$$\delta(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{3300} \approx 57.$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно использовать другую формулу:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Она получается следующим образом:

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) =$$
$$= E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

Здесь мы воспользовались свойствами математического ожидания и тем, что $E(X)$ и $E(X)^2$ – фиксированные числа.

У дисперсии есть три важных свойства. Сформулируем их.

Теорема. Пусть X и Y – независимые случайные величины, а a и k – фиксированные числа, тогда

$$D(X + a) = D(X),$$
$$D(kX) = k^2 D(X),$$
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X + a) = E((X + a - E(X + a))^2) = E((X + a - (E(X) + a))^2) =$$
$$= E((X - E(X))^2) = D(X),$$
$$D(kX) = E((kX - E(kX))^2) = E((kX - kE(X))^2) = E(k^2(X - E(X))^2) = k^2 D(X),$$
$$D(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 =$$
$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X + Y)^2 =$$
$$= E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 =$$
$$= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) =$$
$$= E(X^2) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 = D(X) + D(Y).$$

Математическое ожидание и дисперсия числа успехов в серии испытаний Бернулли

Рассмотрим одно испытание Бернулли, у которого вероятность «успеха» равна p. Тогда математическое ожидание числа успехов в одном испытании равно $0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$. Рассмотрим теперь серию из n одинаковых испытаний Бернулли, число успехов в каждом из них – это n независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, поэтому математическое ожидание числа успехов в серии из n испытаний Бернулли равно

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + ... + E(X_n) = np.$$

Замечание. Отметим, что математическое ожидание числа успехов в серии из n испытаний Бернулли можно было посчитать по определению, используя полученное ранее распределение:

$$0 \cdot C_n^0 p^0 q^n + 1 \cdot C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2 \cdot C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + n \cdot C_n^n p^n q^0.$$

Однако получается довольно сложное выражение, которое непонятно как преобразовывать. Вычислив это математическое ожидание другим способом, мы фактически доказали следующую формулу:

$$0 \cdot C_n^0 p^0 q^n + 1 \cdot C_n^1 p^1 q^{n-1} + 2 \cdot C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + n \cdot C_n^n p^n q^0 = np.$$

Найдём теперь дисперсию числа успехов в серии из n испытаний Бернулли. Дисперсия числа успехов в одном испытании равна

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq,$$

так как распределение вероятностей у X и X^2 одинаковое. Поэтому

$$D(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + ... + D(X_n) = npq.$$

Измерение вероятностей и точность измерения

В предыдущих параграфах мы предполагали, что вероятности интересующих нас событий нам известны. Но даже для реальных монет и игральных костей нельзя с уверенностью сказать, что стороны монеты и грани игральных костей выпадают равновероятно. Монета неидеальна хотя бы потому, что на разных её сторонах разные рельефы, что (пусть и незначительно) может влиять на вероятность выпадения той или другой стороны. А если попытаться сделать идеальную монету с абсолютно одинаковыми сторонами, то как отличить «орла» от «решки»?

К сожалению, нет прибора, который умеет измерять вероятность того или иного события, поэтому никакую реальную вероятность нельзя определить абсолютно точно. К счастью, в практических задачах абсолютная точность обычно не нужна. Основным способом «измерения вероятности» является многократное проведение одного и того же случайного эксперимента.

Пусть мы хотим измерить вероятность некоторого события A. В результате случайного эксперимента событие A может произойти с некоторой вероятностью p или не произойти – с вероятностью $q = 1 - p$. При этом величина p нам неизвестна, и мы хотим её «измерить». Фактически мы имеем испытание Бернулли. Проведём серию из n таких экспериментов. Тогда количество «успехов», как мы знаем, будет случайной величиной K, математическое ожидание и дисперсия которой равны

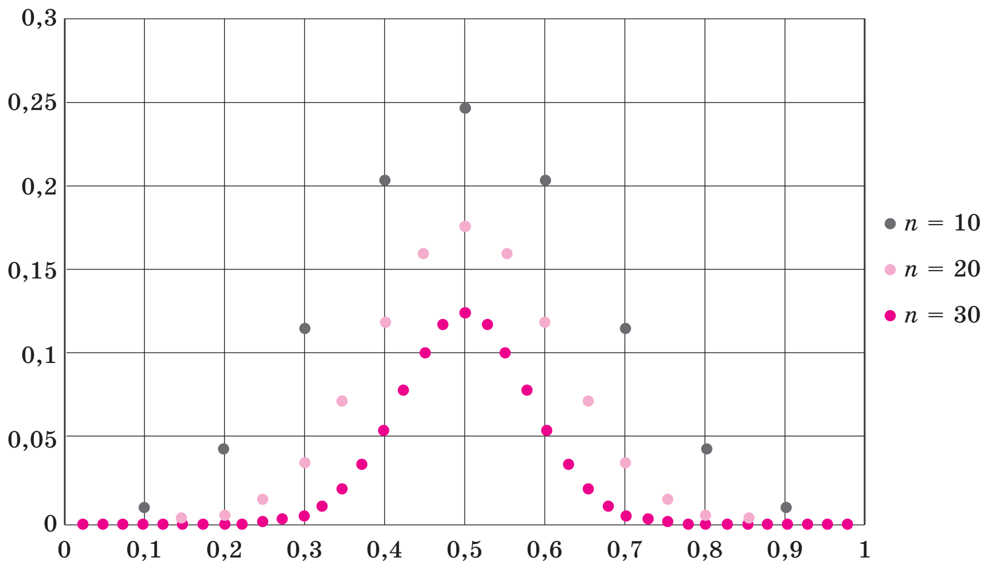
$$E(K) = np, \quad D(K) = npq.$$

Рассмотрим случайную величину $\frac{K}{n}$. Её математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$E\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{1}{n}E(K) = p, \quad D\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(K) = \frac{pq}{n}.$$

Поэтому, если «успех» наступил k раз из n, то величина $\frac{k}{n}$ (которая, как мы знаем, называется частотой события A) при больших n «близка» к реальной вероятности p. А так как дисперсия этой величины убывает с увеличением количества экспериментов, частота будет тем ближе к вероятности, чем больше экспериментов мы проведём. *Если дисперсия мала, то вероятность сильного отклонения случайной величины от своего математического ожидания тоже мала.*

Важно понимать, что мы не гарантируем, например для идеальной монеты, что при большом числе бросков «орёл» всегда будет выпадать примерно в половине случаев. Мы хорошо знаем, что количество K выпадений «орла» описывается биномиальным распределением. И даже есть ненулевая вероятность того, что «орёл» вообще ни разу не выпадет, но при этом вероятность того, что частота выпадения «орла» сильно отличается от 0,5, будет достаточно малой. Поясним сказанное выше, рассмотрев на одном графике три распределения величины $\frac{K}{n}$ для выпадения «орла» при $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$ бросаниях монеты:



С увеличением n «колокольчик» сужается и вероятность получить значения, сильно отличающиеся от 0,5, падает.

Замечание. Этот эффект широко используется при социологических и медицинских исследованиях, а также в прогнозированиях вероятности наступления страховых случаев и некоторых чрезвычайных ситуаций. В теории вероятностей доказывается, что при $n = 2000$ вероятность отклонения частоты события от математического ожидания меньше, чем на 0,03, велика. Эта вероятность превышает 0,99. Практически для всех исследований достаточно такой точности.

Поэтому, например, для большинства опросов используют выборку из 2000 человек, так как если удаётся сделать её действительно случайной, результаты опроса хорошо отражают ситуацию в целом.

Закон больших чисел

Пусть дано n независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ с одинаковым распределением, и их общее математическое ожидание равно m, а дисперсия – d. Рассмотрим новую случайную величину $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$. Для неё

$$E(X) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_n)) = m;$$